

多椭圆孔边裂纹应力强度因子的解析解*

ANALYTICAL SOLUTION OF STRESS INTENSITY FACTOR FOR MULTIPLE ELLIPTICAL HOLE EDGE CRACKS

赵晋芳^{**1,2} 赵 群³ 周 松^{2,4}

(1. 沈阳航空航天大学 民用航空学院, 沈阳 110136)

(2. 沈阳航空航天大学 航空制造工艺数字化国防重点学科实验室, 沈阳 110136)

(3. 沈阳工程学院 机械学院, 沈阳 110136)

(4. 沈阳航空航天大学 机电工程学院, 沈阳 110136)

ZHAO JinFang^{1,2} ZHAO Qun³ ZHOU Song^{2,4}

(1. Civil Aviation College, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

(2. Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense of Aeronautical Digital Manufacturing Process, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

(3. School of Mechanical Engineering, Shenyang Institute of Engineering, Shenyang 110136, China)

(4. School of Mechatronics Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

摘要 老龄飞机机身蒙皮含多孔边裂纹结构,蒙皮孔会在载荷作用下由圆孔变为椭圆孔,多椭圆孔边裂纹应力强度因子的计算是断裂力学分析中的重要问题。采用基于复变函数理论和近似迭加法的解析计算方法,求解多椭圆孔边裂纹在远场应力作用下的应力强度因子,并分析了双椭圆孔边对称裂纹、双椭圆孔边内侧单裂纹、外侧单裂纹及同侧单裂纹几种模式下应力强度因子的变化规律。计算结果表明,多椭圆孔边裂纹的应力强度因子受裂纹长度、椭圆孔口半轴比及孔间距的影响,随着邻近裂尖的逐渐接近,裂纹之间的干涉现象趋于显著。

关键词 多位置损伤 多椭圆孔边裂纹 应力强度因子 复变函数法 解析解

中图分类号 TB12 V215.6

Abstract The aging aircraft fuselage skin contains multiple hole edge cracks, and the skin holes will change from circular holes to elliptical holes under loads. The calculation of stress intensity factors for multiple elliptical hole edge cracks is an important problem in a fracture mechanics analysis. An analytical calculation method based on a complex function theory and an approximate superposition method was used to solve the stress intensity factor of multiple elliptical hole edge cracks under the far-field stress, and the change rules of stress intensity factors under several modes of symmetric cracks at the edge of double elliptical holes, inner cracks at the edge of double elliptical holes, outer cracks at the edge of double elliptical holes and cracks on the same side of double elliptical holes were analyzed. The numerical examples show that the stress intensity factor of the crack at the edge of multiple elliptical holes is affected by the crack length, the half-axis ratio of elliptical holes and the spacing of holes. As the crack tip approaches gradually, the interference phenomenon between cracks tends to be significant.

Key words Multiple site damage; Multiple elliptical hole edge crack; Stress intensity factor; Complex variable function method; Analytical solution

Corresponding author: ZHAO JinFang, E-mail: sau_zjf@163.com

The project supported by the National Natural Science Foundation Project (No. 52105157), the Liaoning Provincial Department of Education Scientific Research Funding Project (No. JYT2020122), and the Open Fund of Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense of Aeronautical Digital Manufacturing Process of Shenyang Aerospace University (No. SHSYS202208).

Manuscript received 20230408, in revised form 20230615.

*20230408 收到初稿, 20230615 收到修改稿。国家自然科学基金项目(52105157), 辽宁省教育厅科学研究经费项目(JYT2020122), 沈阳航空航天大学航空制造工艺数字化国防重点学科实验室开放基金资助项目(SHSYS202208)资助。

**赵晋芳, 女, 1981年生, 辽宁辽阳人, 汉族, 沈阳航空航天大学副教授, 博士, 主要研究方向为结构强度与可靠性。

0 引言

服役多年的飞机经长期疲劳载荷作用,会在飞机蒙皮紧固件孔边出现多处疲劳裂纹,这是典型的多位置损伤(Multiple Site Damage, MSD)结构。1988 年至今,以美国 Aloha 航空事故为代表的一系列事件使业界开始认识并研究这一疲劳失效形式,老龄飞机的结构安全问题得到广泛关注^[1-3]。载荷引起的塑性变形会使紧固孔从圆孔变为椭圆孔,因此,多椭圆孔边裂纹的应力强度因子(Stress Intensity Factor, SIF)计算是断裂力学分析中的重要问题,可作为疲劳裂纹扩展寿命预测和飞机蒙皮结构完整性评估的一项技术参数^[4-10]。

多年来,众多学者针对多孔边裂纹应力强度因子的高效、准确求解展开了深入研究。PARK J H 等^[11]采用有限元方法研究了飞机搭接接头紧固孔产生的复合型裂纹的疲劳扩展情况。KHUBILAL K 等^[12]基于扩展有限元法(Extended Finite Element Methods, XFEM)方法分析了双轴加载下含孔边裂纹板的断裂行为。陈跃良等^[13]使用 Franc2D/L 软件对含 MSD 结构的飞机增压机舱蒙皮的搭接接头进行了有限元分析。ZHU M L 等^[14]对含有缺陷的材料裂纹萌生进行了数值分析,研究了缺陷类型、尺寸、形状、位置和残余应力的影响,阐明裂纹萌生从表面缺陷转变为内部缺陷的潜在机制。李政鸿等^[15]采用 Eshelby 夹杂理论与权函数方法相结合得到了典型多孔多裂纹问题应力强度因子的近似解析解。XU W 等^[16]使用近似权函数方法研究了共线孔边任意分布的小裂纹的应力强度因子问题。张永元等^[17]建立了复变应力函数的近似迭加法,可用于计算多圆孔边裂纹应力强度因子的近似解。ZHAO J F 等^[18]提出了一种复变应力函数的修正方法,提升了多圆孔边裂纹应力强度因子的求解精度。在上述提及的若干种方法中,有限元法具有广泛的适用性,但存在计算数据量大、计算效率低等问题。权函数法和复变函数法在解决多孔边裂纹问题中显示出一定的优势,然而,由于 MSD 结构的复杂性,这两种方法对于不同形状孔口的多孔边裂纹问题的解决方案尚十分有限。

本文提出了多个椭圆孔边任意长度裂纹在远场应力作用下的应力强度因子的解析求解方法,研究方法高效,研究结果准确,可用于多椭圆孔结构的疲劳裂纹扩展分析和 MSD 结构的可靠性分析。

1 基本原理

1.1 Muskhelishvili 复变函数法

Muskhelishvili 利用复变函数理论系统建立了孔口问题应力函数的求解过程^[19]。对于一般的弹性力学

平面问题,在不计体力的情况下,其应力和位移分量可以通过物理平面 z 上的复变函数来确定。为了讨论边界条件,引入辅助平面 ζ ,两者之间存在转换关系 $z = \omega(\zeta)$ 。将 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 看作 ζ 的解析函数,则有

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}[\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{\overline{\omega(\zeta)}[\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)] + \psi'(\zeta)\}/\omega'(\zeta) \\ \frac{E}{1+\mu}(u+iv) = \frac{3-\mu}{1+\mu}\phi(\zeta) - \omega(\zeta)\overline{\phi'(\zeta)}/\omega'(\zeta) - \overline{\psi(\zeta)} \end{cases} \quad (1)$$

经保角变换后,平面 ζ 上的应力函数为

$$\begin{cases} \phi(\zeta) = \frac{1+\mu}{8\pi}(X+iY)\ln\zeta + B\omega(\zeta) + \phi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) = -\frac{3-\mu}{8\pi}(X-iY)\ln\zeta + (B'+iC')\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{cases} \quad (2)$$

$\phi_0(\zeta)$ 、 $\psi_0(\zeta)$ 的边界条件为

$$\begin{cases} \phi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = f_0 \\ \overline{\phi_0(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\phi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) = \overline{f_0} \end{cases} \quad (3)$$

$$f_0 = i \int (\bar{X} + i\bar{Y})ds - \frac{X+iY}{2\pi}\ln\sigma - \frac{1+\mu}{8\pi}(X-iY) \cdot \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\sigma - 2B\omega(\sigma) - (B'-iC')\overline{\omega(\sigma)} \quad (4)$$

式中, X 、 Y 分别为有限边界上沿 x 、 y 方向的面力之和; B 、 B' 、 C' 则由无限远处的应力条件决定。在确定了边界上的应力状态后, X 、 Y 和 B 、 B' 、 C' 也随之确定,因此, f_0 是 σ 的函数。函数 $\phi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 可由平面 ζ 上的边界条件确定,由式(2)可确定 $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$,由式(1)可得到各应力和位移分量。

因此,二维复合型裂纹的应力强度因子为^{[20]73-111}

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi}\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)} \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = 2\sqrt{\pi}\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\phi'(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} \quad (5)$$

经分离可得到相应的 K_I 和 K_{II} 。

1.2 单椭圆孔边裂纹的复变应力函数

假设无限板中有一个含不对称裂纹的椭圆孔,长半轴长为 a ,短半轴长为 b ,两侧裂纹长度分别为 $c-a$ 和 $d-a$,如图 1 所示。以椭圆孔中心为原点,以裂纹所在直线为横坐标轴建立直角坐标系,作保角映射^[21]:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a+b}{8} \frac{g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A}{\zeta} + 2(a-b) \frac{\zeta}{g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A} \quad (6)$$

其中,

$$g = \frac{(a+b)^2 + (c + \sqrt{c^2 - a^2 + b^2})^2}{2(a+b)(c + \sqrt{c^2 - a^2 + b^2})}$$

$$h = \frac{(a+b)^2 + (d + \sqrt{d^2 - a^2 + b^2})^2}{2(a+b)(d + \sqrt{d^2 - a^2 + b^2})}$$

$$A = [(g^2 - 1)(1 + \zeta)^4 + 2(gh + 1)(1 - \zeta^2)^2 + (h^2 - 1)(1 - \zeta)^4]^{\frac{1}{2}}$$

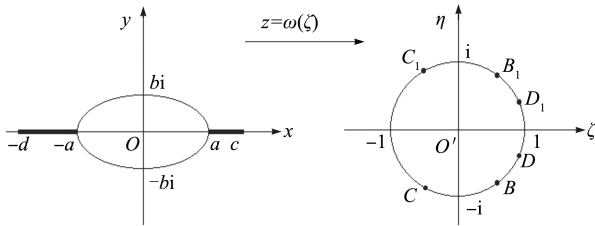


图1 含椭圆孔边不对称裂纹的无限板到单位圆外部的映射

Fig. 1 Mapping of the infinite plate containing elliptical hole with asymmetrical cracks into the exterior of the unit circle

将物理平面上含单椭圆孔边不对称裂纹的无限板保角映射到数学平面上单位圆的外部,映射关系为 $\omega^{-1}(c) \rightarrow 1, \omega^{-1}(-d) \rightarrow -1, \omega^{-1}(bi) \rightarrow B, \omega^{-1}(-bi) \rightarrow B_1$ 。显然, $\omega(\zeta)$ 只有一个一级极点 $\zeta=0$, $\omega(\zeta)$ 的留数为

$$\text{Res}[\omega(\zeta), 0] = \frac{(a+b)(g+h)}{4} \quad (7)$$

对式(6)求导可得

$$\omega'(\zeta) = \frac{a+b}{8} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} (g+h + \frac{B}{A}) - \frac{2(a-b)(\zeta^2 - 1)[(g+h)A + B]}{[g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A]^2 A} \quad (8)$$

其中,

$$B = (g^2 - 1)(1 + \zeta)^2 + 2(gh + 1)(1 + \zeta^2) + (h^2 - 1)(1 - \zeta)^2, \text{ 令}$$

$$\omega_1(\zeta) = \overline{\omega(1/\bar{\zeta})} = \frac{a+b}{8} \frac{g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A}{\zeta} + 2(a-b) \frac{\zeta}{g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A} \quad (9)$$

当 $|\sigma| = 1$ 时, $\omega_1(\sigma) = \overline{\omega(\sigma)}$, 则 $\zeta=0$ 也是 $\omega_1(\zeta)$ 的一级极点。

假设无限板沿 y 轴方向受远场均匀应力 q 作用, 孔口不受力, 根据式(2)、式(4)可得

$$\phi(\zeta) = \frac{q}{4} \omega(\zeta) + \phi_0(\zeta) \quad (10)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{q}{2} \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \quad (11)$$

$$f_0 = -\frac{q}{2} \omega(\sigma) - \frac{q}{2} \overline{\omega(\sigma)} \quad (12)$$

将式(12)代入式(3)可得

$$\phi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\phi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{-\frac{q}{2} \omega(\sigma) - \frac{q}{2} \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma \quad (13)$$

令

$$H(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(1/\bar{\zeta})} \overline{\phi_0'(1/\bar{\zeta})} = \left\{ \frac{a+b}{8} [g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A] / \zeta + 2(a-b)\zeta / [g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A] \right\} \left\{ \frac{(a+b)(1-\zeta^2)}{8} [g+h + \frac{B}{A}] - (a-b) \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2} \frac{(g+h)A + B}{[g(1+\zeta)^2 + h(1-\zeta)^2 + A]^2 A} \right\} \cdot \overline{\phi_0'(1/\bar{\zeta})} \quad (14)$$

其中,

$$\overline{\phi_0'(1/\bar{\zeta})} = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2/\zeta + 3\bar{a}_3/\zeta^2 + \dots$$

由于 $H(\zeta)$ 在单位圆外解析且为圆周上的连续函数, 根据无穷远处的柯西积分公式有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{\overline{\phi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = H(\infty) = 0 \quad (15)$$

式(13)可简化为

$$\phi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{-\frac{q}{2} \omega(\sigma) - \frac{q}{2} \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma \quad (16)$$

因为 $\zeta=0$ 是 $\omega(\zeta)$ 和 $\omega_1(\zeta)$ 的一级极点, 所以根据留数定理有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \omega(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{Res}[\omega(\zeta), 0] \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\omega_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \omega(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \text{Res}[\omega(\zeta), 0] \quad (18)$$

将式(17)、式(18)和式(7)代入式(16)可得

$$\phi_0(\zeta) = -q\omega(\zeta) + \frac{q(a+b)(g+h)}{4\zeta} \quad (19)$$

将式(19)代入式(10)可得

$$\phi(\zeta) = -\frac{3q}{4} \omega(\zeta) + \frac{q(a+b)(g+h)}{4\zeta} \quad (20)$$

至此完成对单椭圆孔边裂纹复变应力函数的求解。

裂尖 $(c, 0)$ 处的应力强度因子可根据参考文献[20]⁷³⁻¹¹¹ 求解, 为

$$K_{I(c,0)} = K_{I(c,0)} - iK_{II(c,0)} = 2\sqrt{\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\phi'(\zeta)}{\sqrt{\omega''(\zeta)}} = 2\sqrt{\pi} \frac{\phi'(1)}{\sqrt{\omega''(1)}} \quad (21)$$

对式(20)求导可得

$$\phi'(\zeta) = -\frac{3q}{4}\omega'(\zeta) - \frac{q(a+b)(g+h)}{4\zeta^2} \quad (22)$$

即

$$\phi'(1) = -\frac{q(a+b)(g+h)}{4} \quad (23)$$

对式(8)求导可得

$$\sqrt{\omega''(1)} = \frac{\sqrt{(g+h)[a(g^2-1) + bg\sqrt{g^2-1}]}}{\sqrt{2(g^2-1)}} \quad (24)$$

将式(23)、式(24)代入式(21), 则

$$K^{(c,0)} = K_I^{(c,0)} - iK_{II}^{(c,0)} = \frac{q(a+b)\sqrt{\pi(g+h)(g^2-1)}}{\sqrt{2[a(g^2-1) + bg\sqrt{g^2-1}]}} \quad (25)$$

因此, 裂尖(c, 0)处的应力强度因子为

$$K_I^{(c,0)} = \frac{q(a+b)\sqrt{\pi(g+h)(g^2-1)}}{\sqrt{2[a(g^2-1) + bg\sqrt{g^2-1}]}}, K_{II}^{(c,0)} = 0 \quad (26)$$

1.3 多椭圆孔边裂纹的复变应力函数

对于多椭圆孔边裂纹问题, 如图 2 所示, 可采用近似迭加法^{[17]77-86}求解裂尖 A 处的应力强度因子, 为

$$K^A = K_I^A - iK_{II}^A = 2\sqrt{\pi} \frac{\phi'_0(\zeta_0) + \sum_{j=1}^M \phi'_j(\zeta_j)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}} = 2\sqrt{\pi} \frac{\phi'_0(1) + \sum_{j=1}^M \phi'_j(\zeta_j)}{\sqrt{\omega''(1)}}, j = 1 \sim M \quad (27)$$

式中, 待求孔口标记为孔 0; ϕ_0 为其孔边裂纹的应力函数; ζ_0 为裂纹尖端的局部坐标; 裂尖 A 的局部坐标为 1。 ϕ_j 为其他孔口的应力函数; ζ_j 为裂尖 A 在孔 j 局部坐标中的对应值, 可通过转换关系 $z_j = \omega(\zeta_j)$ 的反函数确定。

值得注意的是, 虽然各孔口的应力函数均满足相应的边界条件, 但这些应力函数的累加并不满足多孔口结构的边界条件, 其原因是重复引入了无限远处边界的影响项。因此, 在计算 $\sum_{j=1}^M \phi'_j(\zeta_j)$ 中各项时, 可将

无限板视为仅含第 j 个孔口的情况, 但求解时需要去除无限远边界条件的影响项。

2 验证与讨论

为验证计算方法的准确性, 选取含共线双椭圆孔边对称裂纹的无限板作为研究对象, 如图 3 所示, 椭圆半轴比 $a/b=1$, 孔间距 $2l=20a$ 。表 1、表 2 分别列出了裂纹 T_1 和 T_2 的无量纲应力强度因子的解析解和有限元解 (Franc 3D) 的对比计算结果。

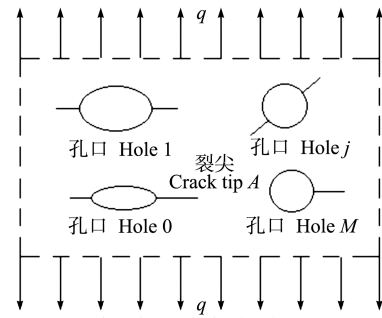


图 2 含多椭圆孔边裂纹的无限板

Fig. 2 Infinite plate containing multiple elliptical hole edge cracks

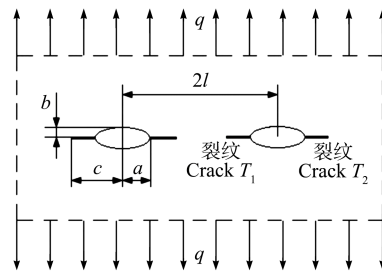


图 3 含共线双椭圆孔边对称裂纹的无限板

Fig. 3 Infinite plate containing symmetric cracks at the edge of collinear double elliptical holes

表 1 双椭圆孔边裂纹 T_1 的无量纲 SIF 的对比计算结果

Tab. 1 Comparative results of dimensionless SIF of double elliptical hole edge crack T_1

c/a	$K_I/(q\sqrt{\pi c})$		
	Franc 3D	所提方法 Proposed method	误差 Error/%
2	0.969 5	1.043 8	-7.12
2.8	0.995 6	1.025 6	-2.92
3.6	1.004 9	1.019 3	-1.41
4.4	1.012 7	1.019 6	-0.68
5.2	1.022 4	1.025 2	-0.27
6	1.035 9	1.036 2	-0.04
6.8	1.055 6	1.054 4	0.11
7.6	1.085 8	1.083 5	0.21
8.4	1.135 7	1.132 5	0.28
9.2	1.232 7	1.228 3	0.36

对比表明, 两种方法的计算结果吻合较好, 尤其当裂纹扩展到一定长度时, 两者基本一致。本文方法中构造的保角映射函数是一个超越函数, 利用其留数对函数进行处理会引入些许误差, 误差主要体现裂纹扩展初期, 本例中约为 7%。不过该阶段并非 MSD 结构的敏感阶段, 人们更关注的是多孔边裂纹在贯穿的瞬间及此前的时刻, 因此本解析方法在求解多椭圆孔边裂纹应力强度因子问题上具有一定的适用性。

表2 双椭圆孔边裂纹 T_2 的无量纲SIF的对比计算结果Tab. 2 Comparative results of dimensionless SIF of double elliptical hole edge crack T_2

c/a	$K_{I_1}/(q\sqrt{\pi c})$		
	Franc 3D	所提方法 Proposed method	误差 Error/%
2	0.976 2	1.043 0	-6.40
2.8	1.001 2	1.023 4	-2.16
3.6	1.007 0	1.014 4	-0.66
4.4	1.010 5	1.010 2	0.02
5.2	1.012 1	1.008 6	0.35
6	1.013 4	1.008 0	0.48
6.8	1.014 4	1.009 3	0.51
7.6	1.015 4	1.010 7	0.46
8.4	1.016 2	1.012 5	0.37
9.2	1.017 0	1.014 6	0.24

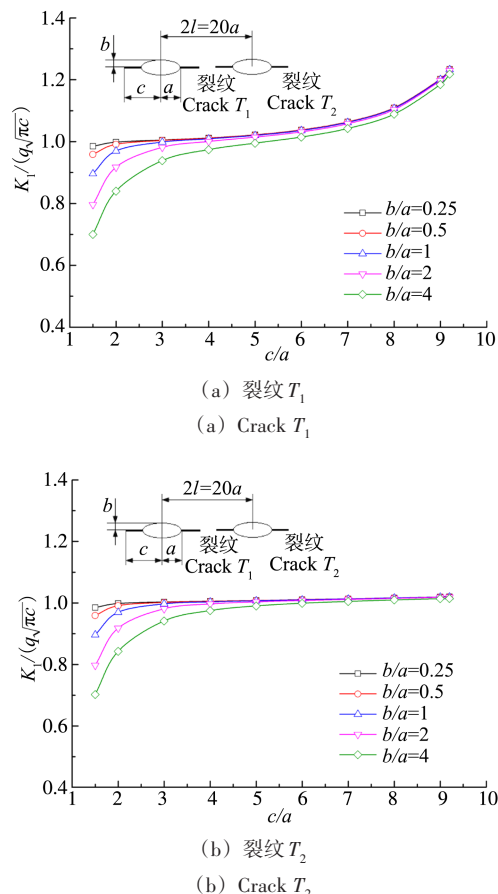
3 算例与分析

算例1:固定孔间距下,含共线双椭圆孔边对称裂纹的无限板结构。当孔间距 $2l=20a$ 时,讨论不同半轴比下裂纹 T_1 和 T_2 的无量纲应力强度因子随裂纹长度的变化规律,如图4所示。

计算结果表明,椭圆孔口半轴比越大,裂纹的应力强度因子越小。不同半轴比下应力强度因子的差异主要体现在裂纹扩展初期,由于裂纹在此阶段主要受到起裂孔的影响,不同的孔口形状导致了应力强度因子的差异。随着裂纹的扩展,应力强度因子逐渐增加,不同半轴比下应力强度因子的差异逐渐减小,因为在此阶段起裂孔对裂纹的影响逐渐减弱直至可被忽略,相同的裂纹长度使得裂纹的SIF值非常接近。

算例2:固定半轴比下,含共线双椭圆孔边对称裂纹的无限板结构。当半轴比 $b/a=0.5$ 时,讨论不同孔间距下裂纹 T_1 和 T_2 的无量纲应力强度因子随裂纹长度的变化规律,如图5所示。

计算结果表明,相同的起裂孔形状致使裂纹初始阶段的SIF值近乎相同,随着裂纹不断扩展,其应力强度因子逐渐显现出差异,这是基于与算例1相同的原因。对于某固定孔间距的多孔边裂纹结构来说,随着裂纹长度的增加,裂纹的SIF值也随之增加,当两个椭圆孔边裂纹接近到一定程度时,裂纹的SIF值呈现出陡增态势,邻近裂纹的干涉影响加剧,此时极易造成裂纹贯穿从而导致结构失效。对于不同孔间距的多孔边裂纹结构来说,裂纹的SIF值随着孔间距的减小而增加,说明了邻近裂纹的影响随孔间距的减小而

图4 共线双椭圆孔边对称裂纹的SIF值($2l=20a$)Fig. 4 SIF value of symmetric cracks at the edge of collinear double elliptical holes ($2l=20a$)

增加。

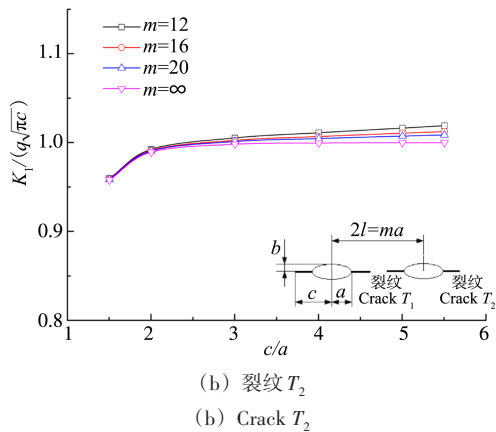
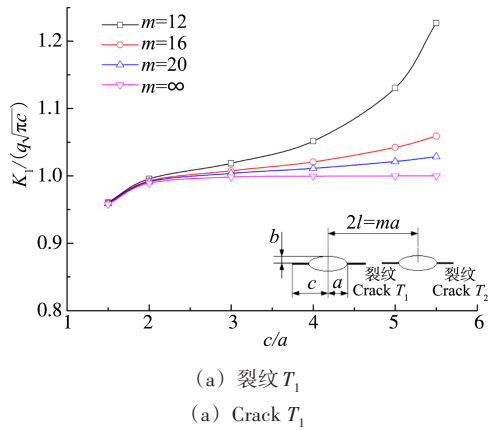
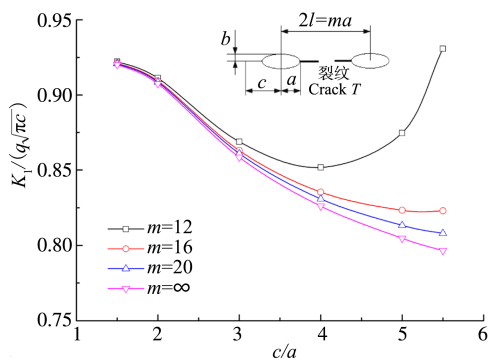
算例3:固定半轴比下,含共线双椭圆孔边单侧裂纹的无限板结构。当半轴比 $b/a=0.5$ 时,分别讨论了椭圆孔边内侧单裂纹,外侧单裂纹和同侧单裂纹的情况,如图6~图8所示。

由图6~图8可以得到固定半轴比下双椭圆孔边单侧裂纹的应力强度因子与裂纹长度及孔间距之间的关系,此处不再赘述。对于上述3种结构来说,含多椭圆孔边内侧单裂纹的无限板更容易因裂纹贯穿而发生失效,而含多椭圆孔边外侧单裂纹的无限板则相对安全。

4 结论

本文基于复变函数理论,采用近似迭加法,解析计算出多椭圆孔边裂纹在远场应力作用下的应力强度因子。并对双椭圆孔边对称裂纹、双椭圆孔边内侧单裂纹、外侧单裂纹及同侧单裂纹几种模式下的应力强度因子开展分析讨论,得出如下主要结论:

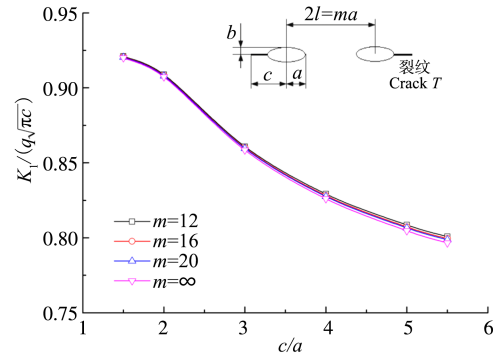
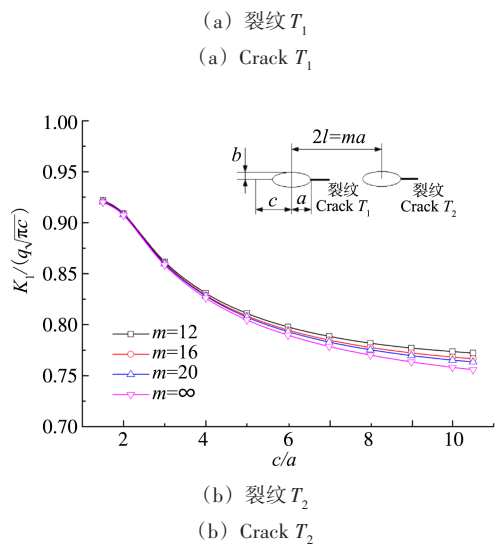
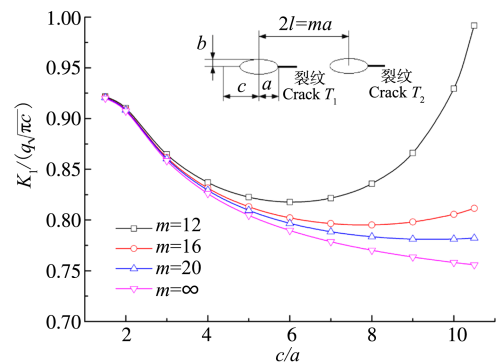
1) 研究了一种基于复变函数理论和近似迭加法的解析计算方法,用于计算多椭圆孔边裂纹的应力强

图 5 共线双椭圆孔边对称裂纹的 SIF 值 ($b/a=0.5$)Fig. 5 SIF value of symmetric cracks at the edge of collinear double elliptical holes ($b/a=0.5$)图 6 共线双椭圆孔边内侧裂纹的 SIF 值 ($b/a=0.5$)Fig. 6 SIF value of inner cracks at the edge of collinear double elliptical holes ($b/a=0.5$)

度因子。该方法具有求解高效、计算准确的特点,可用于解决工程中的断裂问题。

2) 多椭圆孔边裂纹的应力强度因子受裂纹长度、椭圆孔半轴比及孔间距的影响。在上述影响因素中,椭圆孔半轴比(起裂孔形状)主要影响多孔边裂纹初期的扩展进程,孔间距主要影响多孔边裂纹后期的扩展进程。

3) 对于椭圆孔半轴比和孔间距均相同的多孔边

图 7 共线双椭圆孔边外侧裂纹的 SIF 值 ($b/a=0.5$)Fig. 7 SIF value of outer cracks at the edge of collinear double elliptical holes ($b/a=0.5$)图 8 共线双椭圆孔边同侧裂纹的 SIF 值 ($b/a=0.5$)Fig. 8 SIF value of cracks on the same side of collinear double elliptical holes ($b/a=0.5$)

裂纹结构来说,裂纹的不同分布模式对结构的影响差异较大,含多椭圆孔边双侧裂纹的结构相较含多椭圆孔边单侧裂纹的结构偏于危险。

参考文献 (References)

- [1] 刘世华,张宝才,谢隋杰,等. 增材制造钛合金飞机结构维修件力学性能试验研究[J]. 机械强度,2023,45(6):1340-1347.
LIU ShiHua, ZHANG BaoCai, XIE SuiJie, et al. Experimental research on mechanical properties of titanium alloy aircraft struc-

- ture maintenance parts by additive manufacturing [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2023, 45(6): 1340-1347 (In Chinese).
- [2] 樊俊铃, 张伟, 焦婷, 等. 飞机结构螺栓连接细节疲劳断裂失效机制与寿命分析[J]. *机械强度*, 2023, 45(6): 1459-1464.
FAN JunLing, ZHANG Wei, JIAO Ting, et al. Failure mechanism of fatigue fracture and life analysis for bolted joint of aircraft structure [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2023, 45(6): 1459-1464 (In Chinese).
- [3] 李亚智, 李强, 沈培良. 运输类飞机防止广布疲劳损伤的适航要求[J]. *航空工程进展*, 2011, 2(4): 373-382.
LI YaZhi, LI Qiang, SHEN PeiLiang. An overview of airworthiness requirements for transport category airplanes to prevent wide spread fatigue damage [J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2011, 2(4): 373-382 (In Chinese).
- [4] 刘文琰, 郑旻仲, 费斌军, 等. 概率断裂力学与概率损伤容限/耐久性[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999: 169-193.
LIU WenTing, ZHENG MinZhong, FEI BinJun, et al. Probabilistic fracture mechanics and probabilistic damage tolerance/durability [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1999: 169-193 (In Chinese).
- [5] 秦剑波, 王锋, 吕品, 等. 含纵向裂纹飞机内压壁板裂纹扩展行为研究[J]. *机械强度*, 2024, 46(3): 559-567.
QIN JianBo, WANG Feng, LÜ Pin, et al. Study on crack propagation behaviors of aircraft internal pressure panels with longitudinal cracks [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2024, 46(3): 559-567 (In Chinese).
- [6] 肖俊华, 崔友强, 徐耀玲, 等. 纳米尺度孔边裂纹裂尖Ⅲ型应力强度因子研究[J]. *中国机械工程*, 2018, 29(19): 2347-2352.
XIAO JunHua, CUI YouQiang, XU YaoLing, et al. Study on mode Ⅲ stress intensity factor at tip of nano cracks emanating from a circular hole [J]. *China Mechanical Engineering*, 2018, 29(19): 2347-2352 (In Chinese).
- [7] 祝青钰, 周锐. 椭圆孔边任意长度双裂纹复合型应力强度因子复变函数解[J]. *机械强度*, 2019, 41(4): 983-987.
ZHU QingYu, ZHOU Rui. Complex variable function solutions of mixed-mode stress intensity factors for two cracks of arbitrary length emanating from an elliptical hole [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2019, 41(4): 983-987 (In Chinese).
- [8] SEIFI R, GHADIMIAN O, RANJBARAN M. Study on life and path of fatigue cracks in multiple site damage plates [J]. *International Journal of Fatigue*, 2015, 80: 449-458.
- [9] ZHANG X S, LONG Q M, ZHENG T, et al. Theoretical analysis of stress intensity factor for two unequal collinear cracks subjected to internal pressure and compressive stress [J]. *Journal of Mechanics*, 2021, 37: 584-596.
- [10] GIANNELLA V. Uncertainty quantification in fatigue crack-growth predictions [J]. *International Journal of Fracture*, 2022, 235(2): 179-195.
- [11] PARK J H, ATLURI S N. Mixed mode fatigue growth of curved cracks emanating from fastener holes in aircraft lap joints [J]. *Computational Mechanics*, 1998, 21(6): 477-482.
- [12] KHAIRI K, LAL A. Stochastic XFEM based fracture behavior and crack growth analysis of a plate with a hole emanating cracks under biaxial loading [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2018, 96: 1-22.
- [13] 陈跃良, 郁大照, 杨茂胜, 等. 含多处损伤搭接结构应力强度因子有限元分析[J]. *航空学报*, 2007, 28(3): 615-619.
CHEN YueLiang, YU DaZhao, YANG MaoSheng, et al. Finite element analysis of stress intensity factors of lap joint with multiple site damage [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, 28(3): 615-619 (In Chinese).
- [14] ZHU M L, XUAN F Z. Fatigue crack initiation potential from defects in terms of local stress analysis [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 27(3): 496-503.
- [15] 李政鸿, 徐武, 张晓晶, 等. 多孔多裂纹平板的疲劳裂纹扩展试验与分析方法[J]. *航空学报*, 2018, 39(7): 221867.
LI ZhengHong, XU Wu, ZHANG XiaoJing, et al. Experimental and analytical analyses of fatigue crack growth in sheets with multiple holes and crack [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(7): 221867 (In Chinese).
- [16] XU W, WU X R, YU Y, et al. A weight function method for mixed modes hole-edge cracks [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2018, 41(1): 223-234.
- [17] 张永元, 蔡皓东. 多孔边裂纹板的应力强度因子计算[J]. *上海交通大学学报*, 1986(5): 77-86.
ZHANG YongYuan, CAI HaoDong. Calculation of SIF for plate containing radial crack around multiple holes [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1986(5): 77-86 (In Chinese).
- [18] ZHAO J F, XIE L Y, LIU J Z, et al. A method for stress intensity factor calculation of infinite plate containing multiple hole-edge cracks [J]. *International Journal of Fatigue*, 2012, 35(1): 2-9.
- [19] MUSKHELISHVILI N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity [M]. Holland: Noordhoff International Publishing Goningen, 1953: 105-166.
- [20] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 73-111.
FAN TianYou. Theoretical basis of fracture theory [M]. Beijing: Science Press, 2003: 73-111 (In Chinese).
- [21] 郭怀民, 乔文华. 椭圆孔边两不对称裂纹问题的复变函数解[J]. *力学季刊*, 2011, 32(3): 444-451.
GUO HuaiMin, QIAO WenHua. Complex variable function analysis of an elliptic hole with asymmetry edge cracks [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2011, 32(3): 444-451 (In Chinese).