

基于协同-均值点约束主动学习代理模型的结构可靠性分析方法*

STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS METHOD BASED ON COLLABORATION-MEAN POINT CONSTRAINED ACTIVE LEARNING SURROGATE MODEL

魏彦旭^{**1,2,3} 张世龙^{1,2,3} 张彦杰^{1,2,3}

(1. 太原理工大学 机械与运载工程学院, 太原 030024)

(2. 太原理工大学 先进金属复合材料成形技术与装备教育部工程研究中心, 太原 030024)

(3. 太原理工大学 金属成形技术与重型装备全国重点实验室, 太原 030024)

WEI YanXu^{1,2,3} ZHANG ShiLong^{1,2,3} ZHANG YanJie^{1,2,3}

(1. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

(2. Engineering Research Center of Advanced Metal Composites Forming Technology and Equipment, Ministry of Education, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

(3. National Key Laboratory of Metal Forming Technology and Heavy Equipment, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

摘要 机械结构的可靠性对其安全运行至关重要,针对复杂机械结构可靠性分析计算精度和计算效率低的问题,研究基于主动学习代理模型可靠性分析方法的优秀拟合样本应具有的空间位置特点,分离提出优秀拟合样本的3个约束——面约束、距约束和域约束,并建立3个控制函数来实现3个约束;然后有机地协同3个控制函数,提出一种有效的新学习函数——协同-均值点约束学习(Collaboration-mean Point Constrained Learning, CPCL)函数,并结合增广径向基函数(Augmented Radial Basis Function, ARBF),建立协同-均值点约束主动学习代理模型(ARBF+CPCL)可靠性分析方法。最后通过3个案例验证了ARBF+CPCL可靠性分析方法具有高精度、高效率的优势,并且通过涡轮盘可靠性分析算例证明了ARBF+CPCL方法在实际工程案例中的应用能力。

关键词 机械结构 可靠性分析 主动学习 涡轮盘 拟合样本

中图分类号 TB114.3

Abstract The reliability of mechanical structures is crucial for their safe operation, to address the problem of low accuracy and low efficiency in reliability analysis of complex mechanical structures, a new active learning surrogate model based reliability analysis method was proposed. The spatial location characteristics of excellent fitting samples were studied and three constraints, such as surface constraint, distance constraint, and domain constraint, were proposed accordingly. Correspondingly, three control functions were established to achieve the three constraints. Then, three control functions were organically collaborated, and an effective new learning function, collaboration-mean point constrained learning (CPCL) function was proposed. Combined with the augmented radial basis function (ARBF), a collaboration-mean point constrained active learning surrogate model (ARBF+CPCL) reliability analysis method was established. Finally, three cases were employed to verify the high computational accuracy and computational efficiency of ARBF+CPCL reliability analysis method, and the application ability of ARBF+CPCL method in practical engineering cases was proved through the reliability analysis example of the turbine disk.

Key words Mechanical structure; Reliability analysis; Active learning; Turbine disk; Fitting sample

Corresponding author: WEI YanXu, E-mail: weiyanyu@tyut.edu.cn

The project supported by the Key R&D Program of Shanxi Province (No.202102110401016), and Youth Fund of the National Natural Science Foundation of China (No.52205164).

Manuscript received 20240309, in revised form 20240330.

*20240309收到初稿, 20240330收到修改稿。山西省重点研发项目(202102110401016), 国家自然科学基金青年基金项目(52205164)资助。

**魏彦旭, 男, 1987年生, 河北邢台人, 汉族, 太原理工大学机械与运载工程学院讲师, 硕士研究生导师, 主要研究方向为机械结构可靠性设计和机械结构优化设计。

0 引言

机械结构的可靠性对机械装备安全运行至关重要,特别是航空、高速铁路等重要机械装备的关键零部件,如航空发动机涡轮结构、高速列车车轮等,一旦发生失效,将带来灾难性的后果^[1-2]。然而,机械结构的几何尺寸和制造材料的力学性能具有一定的分散性,其运行环境也有很强的不稳定性,造成机械结构的承载能力和失效条件具有一定的不确定性,因此需要根据概率统计学和可靠性分析的基本理论,对机械装备的关键部件进行精确的可靠性分析^[3]。

机械结构的复杂化、轻量化和高性能化导致其设计要求更高,且其力学性能和承载能力计算往往涉及大规模的有限元计算,传统的可靠性分析方法,如一次二阶矩方法、二次二阶矩方法和蒙特卡洛方法,以及其相应的改进方法,往往因为计算精度差或者计算效率低,无法满足工程的可靠性分析要求^[4-7]。将蒙特卡洛方法和代理模型方法相结合可以实现对复杂机械结构的可靠性分析,其基本思想是基于蒙特卡洛方法可靠性分析高精度的特点和代理模型计算效率高的特点,利用代理模型代替机械结构的大型有限元计算,从而高精度高效率地实现机械结构的可靠性分析^[8-9]。因为多项式代理模型方法无法拟合高度非线性的隐式函数,所以只能解决一些简单的问题或者进行极小的局部拟合^[10];插值函数因其自身能够适应不同的隐式函数而得到广泛的应用,如克里金插值函数^[11-12]、径向基函数^[13-14]等,然而插值函数对拟合样本的要求较高。

拟合样本的产生方法有两种:一次性生成样本方法和序列加点方法。一次性生成拟合样本方法产生的样本无针对性,因而导致其中很大一部样本对拟合精度的贡献很小^[15];序列加点方法可以根据已有的信息指导生成新的样本点,因而可以产生高效的对拟合精度贡献很大的拟合样本^[16]。主动学习方法是序列加点方法中最有效的,它能够根据已有的信息产生高效的拟合样本,从而提高基于代理模型可靠性分析方法的计算效率和计算精度。作为主动学习方法的核心,学习函数直接指导生成新的拟合样本,对主动学习代理模型可靠性分析方法的计算精度和计算效率至关重要^[17-18]。

为了提升机械结构可靠性分析的计算效率和计算精度,本文利用代理模型优秀拟合样本的空间位置约束和可靠性分析的特点,提出了协同-均值点约束学习(Collaboration-mean Point Constrained Learning, CPCL),

并结合增广径向基函数(Augmented Radial Basis Function, ARBF),建立了增广径向基函数+协同-均值点约束学习函数(ARBF+CPCL)的可靠性分析方法,以提高机械结构可靠性分析的计算精度和计算效率。

1 代理模型-可靠性分析的基本理论

机械结构可靠性分析主要是依据功能函数 $h(\mathbf{x})$ 求解其发生失效的概率,而机械结构的功能函数是高度非线性的隐式函数,其求解往往涉及大型有限元计算,所以无法直接使用解析方法对机械结构的可靠性进行分析。蒙特卡洛仿真(Monte Carlo Simulation, MCS)方法为此提供一种精确地求解机械结构失效概率的模拟计算方法。MCS方法基于输入变量的概率分布特征生成足够多的MCS样本,然后计算样本中失效样本数量和总样本数量的比值近似地作为机械结构的失效概率,其计算方法如下:

$$p_f = \frac{1}{n_{MCS}} \sum_{i=1}^{n_{MCS}} I[h(\mathbf{x}) < 0] \quad (1)$$

式中, p_f 为机械结构的失效概率; n_{MCS} 为生成的蒙特卡洛样本数量; $h(\mathbf{x})$ 为机械结构的功能函数; $\mathbf{x}$ 为影响机械结构可靠性的各个输入变量; $I[h(\mathbf{x})]$ 是一个符号函数,其表达式为

$$I[h(\mathbf{x})] = \begin{cases} 1, & h(\mathbf{x}) < 0 \\ 0, & h(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

对于复杂的机械结构,通过大型有限元方法进行计算 $h(\mathbf{x})$,但是MCS方法是建立在大数定律的基础上,为了获取精确的计算结果,需要进行大量的抽样,即需要进行大量的有限元计算,大型有限元计算十分消耗计算资源和计算时间,导致使用蒙特卡洛方法进行可靠性分析的计算效率十分低,甚至不可能完成。

针对上述问题,利用计算效率高的代理模型代替式(1)中的功能函数 $h(\mathbf{x})$,避免进行大量的有限元计算,从而极大地提高了计算效率:

$$p_f = \frac{1}{n_{MCS}} \sum_{i=1}^{n_{MCS}} I[g(\mathbf{x}) < 0] \quad (3)$$

式中, $g(\mathbf{x})$ 为代理模型函数。

由式(1)可以看出,对机械结构进行可靠性分析,只需要对功能函数值的正负号进行准确计算,而无须计算其精确值,因此,只需要在功能函数值为零处完成对功能函数的精确拟合,即在极限状态方程 $h(\mathbf{x})=0$ 处完成精确拟合,然后产生足够多的蒙特卡洛样本,利用式(3),就可以高精度高效率地实现机械结构的可靠性分析。

2 协同-均值点约束主动学习代理模型可靠性分析方法

2.1 径向基插值函数

径向基函数(Radial Basis Function, RBF)是一种精确的插值函数,它能够高精度地拟合各种高度非线性的复杂函数。为了进一步加强径向基函数拟合复杂函数的能力,通过与多项式函数组合形成 ARBF^[19-20]。ARBF 具有更强的泛化能力和高精度拟合复杂函数的能力,因此得到了广泛的应用。

对于一组给定的拟合样本 $Z=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m]$, RBF 是由其基函数的线性组合组成的:

$$g_r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2, c) \quad (4)$$

式中, $g_r(\mathbf{x})$ 为 RBF; ϕ 为 RBF 的基函数; a_i 为膨胀系数,通过 m 个拟合样本及其相应极限状态函数值 $\mathbf{G}=[g_1, g_2, \dots, g_m]$ 可以解出; $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$ 为 $\mathbf{x}-\mathbf{x}_i$ 的二阶范数; c 为形状参数,它对 RBF 的拟合精度有较大的影响,一般采用交叉验证的方法对其进行求解。

如上文所说,一般为了进一步加强 RBF 对复杂函数的适应能力,将其与多项式进行结合,形成了 ARBF:

$$g_{ar}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2, c) + \sum_{j=1}^p b_j g_{\phi_j}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

式中, b_j 为多项式 $g_{\phi_j}(\mathbf{x})$ 项的系数; p 为多项式的项数。对于增广的多项式,一般使用一次多项式就能够取得很好的改善拟合精度。

为了求解式(5)中因为增广多项式产生的系数,利用附加的正交条件列出等式,进行求解:

$$\sum_{i=1}^m a_i g_{\phi_j}(\mathbf{x}_i) = 0, j = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

因此, ARBF 中所有的系数求解式为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G}_d \\ \mathbf{G}_d^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为 RBF 的基函数的矩阵形式, $A_{i,j} = A_{j,i} = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2, c)$ ($i, j=1, 2, 3, \dots, m$); $\mathbf{G}_d$ 为增广多项式的矩阵形式, $G_{d,i,j} = g_{\phi_j}(\mathbf{x}_i)$ ($i=1, 2, 3, \dots, m; j=1, 2, 3, \dots, p$); $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 为 a_i 、 b_j 的矩阵形式; $\mathbf{G}$ 为试验点的功能函数值。RBF 的基函数有很多种,本文采用高斯函数作为 RBF 的基函数。

2.2 协同-均值点约束学习函数

在代理模型确定的条件下,拟合样本就成为决定可靠性分析计算精度和计算效率的主要因素。主动学习方法为生成优秀拟合样本提供了一个出色的方法,作为主动学习策略最主要的核心内容,学习函数

规定了产生拟合样本的规则,决定了拟合样本的位置,对基于代理模型的可靠性分析的计算效率和计算精度有着至关重要的作用。

为了生成有效的拟合样本,将优秀拟合样本具有的特点按照空间位置进行分解,然后将能够实现这些特点的方法有机地协同起来,建立学习函数,最终实现样本点的约束,产生优秀的样本点。在标准正态空间中,按照优秀拟合样本的空间位置特点,总结归纳出3个约束:面约束、距约束和域约束。

2.2.1 面约束

使拟合样本尽可能地接近极限状态方程,提高拟合样本的有效性和代理模型的拟合精度。为此,在每次迭代中,假设已有代理模型可以较好地拟合极限状态方程,则位于代理模型上的样本就可以近似地认为在极限状态方程上。我们用已有的代理模型来实现面约束,建立面控制函数 $S(\mathbf{x}_N)$:

$$S(\mathbf{x}_N) = g_{ar}(\mathbf{x}_N) \quad (8)$$

式中, $g_{ar}(\mathbf{x}_N)$ 为代理模型函数。式(8)称为面控制函数,由极限状态方程的定义可知,想要实现面约束,则需要求得 $\mathbf{x}_N$ 使 $S(\mathbf{x}_N)$ 的绝对值为零。

2.2.2 距约束

使拟合样本之间保持一定的距离,保证求解代理模型系数的数值稳定性和避免不必要的样本点(相互特别近的样本点或者重叠样本点)。在此,为了实现距约束,要求每一个新的样本在加入拟合样本时,都要和所有已有的拟合样本保持一定的距离。因此,用新的样本到所有的拟合样本的最小距离来保持拟合样本之间的距离,建立距控制函数 $D(\mathbf{x}_N)$:

$$D(\mathbf{x}_N) = \min_{\mathbf{x}_i} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_{Ni} - \mathbf{x}_{EXi})^2} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{x}_{EXi}$ 为某个已有拟合样本的第 i 个元素。式(9)称为距控制函数,通过寻找 $\mathbf{x}_N$ 使 $D(\mathbf{x}_N)$ 最大化就可以实现距约束。

2.2.3 域约束

使拟合样本尽可能地保持在某个区域内(如最可能失效点附近或者高概率密度区域内),加强特定区域内的拟合精度,避免区域外的不必要的拟合样本,提高可靠性分析的计算精度和计算效率。为此,使用已有拟合样本 $\mathbf{X}$ 的均值点 $\mathbf{x}_{ME}$ 作为核心,使大部分的拟合样本聚集在均值点 $\mathbf{x}_{ME}$ 附近。因此,利用新拟合样本 $\mathbf{x}_N$ 到已有拟合样本均值点 $\mathbf{x}_{ME}$ 的距离 $\chi(\mathbf{x}_N)$ 建立域控制函数 $\chi(\mathbf{x}_N)$:

$$\chi(\mathbf{x}_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_{Ni} - \mathbf{x}_{MEi})^2} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{x}_{MEi}$ 为均值点的第 i 个变量。由距离 $\chi(\mathbf{x}_N)$ 函数的

定义可知, $\chi(\mathbf{x}_N)$ 函数值越小, 则拟合样本越靠近均值点 $\mathbf{x}_{ME}$ 。

上述 3 个约束相互约束, 并不能够同时完全满足其要求, 但是需要最大化地满足 3 个约束从而产生优秀的拟合样本。因此, 为了使新的拟合样本能够尽可能同时满足上述的 3 个约束, 需要协同处理上述 3 个控制函数, 建立一个基于已有拟合样本均值点 $\mathbf{x}_{ME}$ 的学习函数 $C_{ME}(\mathbf{x}_N)$:

$$C_{ME}(\mathbf{x}_N) = \frac{S^2(\mathbf{x}_N)}{D(\mathbf{x}_N)} [\chi(\mathbf{x}_N)]^v \quad (11)$$

由式(11)可以看出, 函数 $C_{ME}(\mathbf{x}_N)$ 越小, 则越能够满足 3 个函数的要求。因此, 为了求得优秀的拟合样本, 需要应用优化算法, 求解学习函数 $C_{ME}(\mathbf{x}_N)$ 的最小值, 相应的最优解就是新的拟合样本。

学习函数 $C_{ME}(\mathbf{x}_N)$ 的二维示意图如图 1 所示。由图 1 可以看出, 相比于其他的区域, 极限状态方程在均值点 $\mathbf{x}_{ME}$ 附近拥有更多更为稠密的 MCS 样本。因此, 需要更多的拟合样本来提高这一区域的拟合精度, 从而可以精确分割这些 MCS 样本。而远离均值点的区域, 特别是包含 MCS 样本区域的边缘, 有稀疏的较少的 MCS 样本, 因此, 需要很少的拟合样本就可以精确区分这些 MCS 样本。在 CPCL 学习函数中, 为了加强距约束和面约束的作用, 设置 v 的值为 0.1。

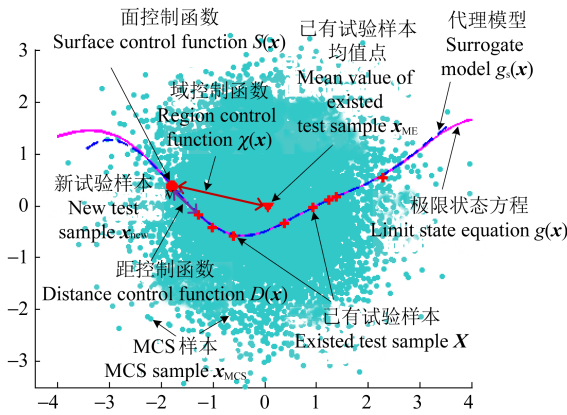


图 1 学习函数 CPCL 的二维示意图

Fig. 1 Two-dimensional diagram of learning function CPCL

结合 CPCL 和 ARBF, 建立协同-均值点约束主动学习代理模型可靠性分析方法 (ARBF+CPCL), 高精度、高效率地实现机械结构可靠性分析。

3 算法的基本流程

主动学习代理模型可靠性分析方法主要分为初始拟合和序列加点拟合两个阶段。

为此, 首先使用平移传播算法 (Translational Propagation Algorithm, TPLHD) 产生 $\max(2n, 12)$ 个样本

$\mathbf{x}_T^{[12,19]}$, 然后根据 3σ 原则, 利用下式将样本 $\mathbf{x}_T$ 转化到包含 99.73% MCS 样本的区域内, 最终获得初始样本 $\mathbf{x}_{ini}$ 。

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{ini} = \mathbf{x}_{TD} \frac{R_H}{\max(\|\mathbf{x}_{TDi}\|_2)} \\ \mathbf{x}_{TD} = \mathbf{x}_T - \frac{\sum_{i=1}^{\max(2n, 12)} \mathbf{x}_{Ti}(1)}{\max(2n, 12)} \\ R_H = R_{\text{round}[2\Phi(-3\sigma)n_{MCS}]} \end{cases} \quad (12)$$

R_H 为在标准正态空间中 MCS 样本按照距离原点半径经从小到大排序后的第 $\text{round}[2\Phi(-3\sigma)n_{MCS}]$ 个样本; Φ 为标准正态概率分布函数; $\text{round}(k)$ 为向下取 k 的整数。然后利用初始样本 $\mathbf{x}_{ini}$ 和相应的极限状态函数值 g_{arini} , 就可以完成代理模型的初始拟合, 为后续的迭代提供基本的信息。

在完成初始拟合之后, 使用主动学习方法, 通过多次的迭代逐步添加拟合样本, 提高代理模型的拟合精度, 在计算结果满足计算精度时, 停止迭代。对机械结构进行可靠性分析, 失效概率 p_i 是最为重要的可靠性分析结果, 因此, 建立基于失效概率的迭代停止条件为

$$\begin{cases} w_s = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (p_{fi-j} - p_{fm})^2}}{p_{fm}} \leq \varepsilon \\ p_{fm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_{fi-j}, i > N \end{cases} \quad (13)$$

式中, p_{fm} 为最后 N 次迭代的失效概率的平均值。式(13)表示如果最后 N 次迭代得到的失效概率没有变化或者变化较小, 则可以认为算法已经收敛。考虑到代理模型每次迭代只增加一个新拟合样本, 以保证可靠性分析的计算精度为重点, 综合考虑计算效率后, N 的值设定为 $\max(6, 2n)$ 。同时为了保证失效概率的精确, ε 值设定为 10^{-4} 。

算法的具体流程如下:

1) 首先根据输入变量的个数 n , 在标准正态空间中生成 n 维的 MCS 样本。

2) 根据 TPLHD 方法及式(12), 在标准正态空间中生成初始拟合样本 $\mathbf{x}_{ini}$, 然后将初始拟合样本转换到计算空间中, 计算初始拟合样本的响应值, 得到 g_{ini} 。

3) 利用初始拟合样本 $\mathbf{x}_{ini}$ 及相应的响应值 g_{ini} , 初步拟合代理模型, 得到 $g_{arini}(\mathbf{x})$ 。

4) 利用学习函数迭代加点, 逐步增加可靠性分析的精度。第 k 迭代, 根据已有拟合样本 $\mathbf{X}^{k-1}$ ($k=1$ 时为 $\mathbf{x}_{ini}$)、相应的响应值 $\mathbf{G}^{k-1}$ ($k=1$ 时为 g_{ini}) 和代理模型 $g_{ar}^{k-1}(\mathbf{x}_N)$, 建立学习函数 $C_{ME}^k(\mathbf{x}_N)$, 利用 $C_{ME}^k(\mathbf{x}_N)$ 从 MCS 样本中选取新的拟合样本 $\mathbf{x}_N^*$ 。

5) 计算 $g(\mathbf{x}_N^*)$, 然后更新 $\mathbf{X}^{k-1}$ 和 $\mathbf{G}^{k-1}$, 得到 $\mathbf{X}^k$ 和 $\mathbf{G}^k$, 利用 $\mathbf{X}^k$ 和 $\mathbf{G}^k$ 拟合更新代理模型 $g_{ar}^{k-1}(\mathbf{x}_N)$, 得到 $g_{ar}^k(\mathbf{x}_N)$ 。

6) 利用 $g_{ar}^k(\mathbf{x}_N)$ 和 MCS 样本计算机械结构的失效概率 p_f^k 。

7) 当 $k > \max(6, 2n)$ 时, 判断算法结果是否满足迭代停止条件, 是则停止计算, 得到最终的失效概率 p_f^k , 否则转到步骤 5)。

整个算法的流程如图 2 所示。

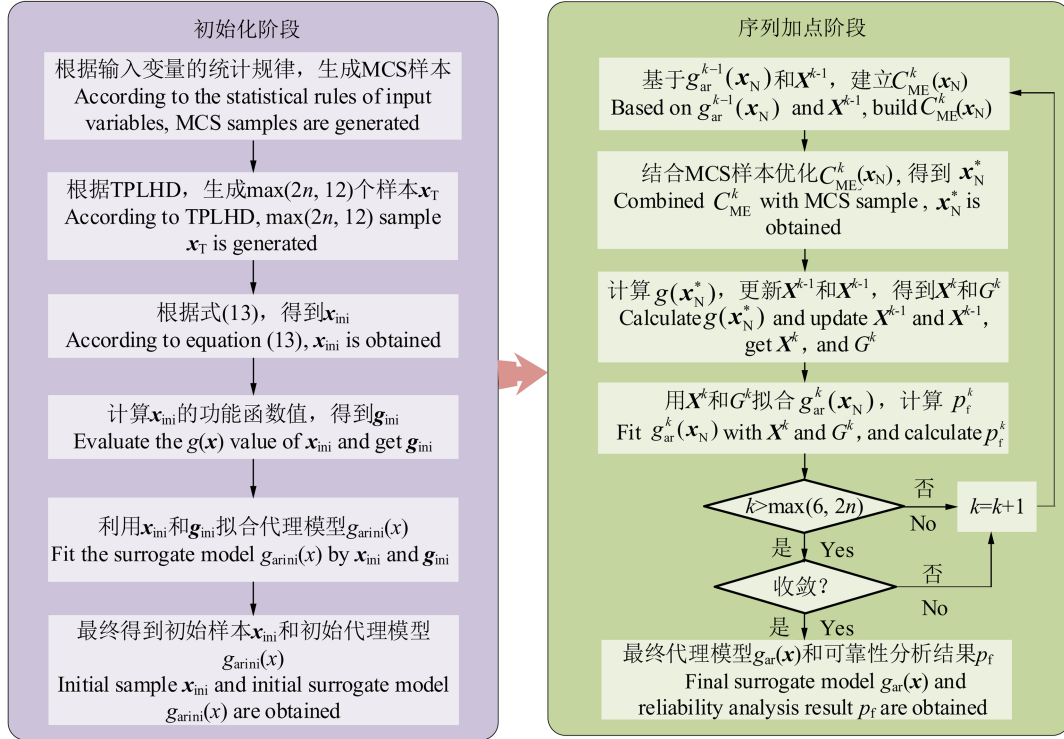


图2 ARBF+CPCL可靠性分析算法流程图

Fig. 2 Flow chart of ARBF+CPCL reliability analysis algorithm

4 算例验证

在此,使用两个算例验证提出的可靠性分析方法的计算精度和计算效率。为了说明提出方法的先进性,将计算结果同经典的主动学习代理模型方法AK+EFF^[20]、AK+U^[12]、AK+H^[11]、AK+REIF^[18]和AK+REIF2^[18](其中AK为克里金函数)进行对比;为了消除因初始拟合样本和MCS样本的差异性带来的计算结果的不确定性,增加各种方法的可比性,各种可靠性分析方法都使用相同的初始拟合样本和MCS样本。

4.1 算例1

本算例是一个具有4种失效模式的二维可靠性分析问题,其功能函数为

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = 3 + \frac{1}{10}(x_1 - x_2)^2 - \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}} \\ g_2(\mathbf{x}) = \frac{6}{\sqrt{2}} + (x_1 - x_2) \\ g_3(\mathbf{x}) = 3 + \frac{1}{10}(x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{2}} \\ g_4(\mathbf{x}) = \frac{6}{\sqrt{2}} + (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (14)$$

式中, x_1, x_2 相互独立且服从标准正态分布。这4个函数为串联关系,一旦某个失效模式发生失效,则认为系统发生失效,即如果 $\min\{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}), g_4(\mathbf{x})\} < 0$, 则失效,因此,其功能函数可以转化为

$$g(\mathbf{x}) = \min\{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}), g_4(\mathbf{x})\} \quad (15)$$

分别采用 ARBF+CPCL、AK+EFF、AK+U、AK+H、AK+REIF 和 AK+REIF2 方法对此案例进行可靠性分析,其计算结果如表 1 所示。几乎所有的可靠性分析方法都可以得到精确的可靠性分析结果,但是本文提出的 ARBF+CPCL 可靠性分析方法拟合代理模型所使用的拟合样本数量最少,验证了 ARBF+CPCL 方法在保证可靠性分析结果精确度的同时,还提高了计算效率。此外,AK+H 可靠性分析方法因为计算提前收敛,获得了错误的可靠性分析结果。虽然 AK+U 的可靠性分析方法使用的拟合样本数量和 ARBF+CPCL 方法几乎相同,但是 ARBF+CPCL 方法的计算结果更加精确,也证明了提出方法的先进性。

图 3 的各个子图分别展示了 MCS 样本以及各种可靠性分析方法最终的拟合样本分布、代理模型和极限状态方程。由图 3 可以看出 ARBF+CPCL 方法产生的拟合样本几乎全部聚集在极限状态方程附近,且位于

概率密度较高的区域,对于在 MCS 样本的边缘部分,有较少的拟合样本,但是却足以将所有的 MCS 正确地划分出来。因此,ARBF+CPCL 方法能够利用最少的

拟合样本得到精确的可靠性分析结果。

通过本案例的计算结果可以证明,ARBF+CPCL 方法具有高精度、高效率地完成可靠性分析的能力。

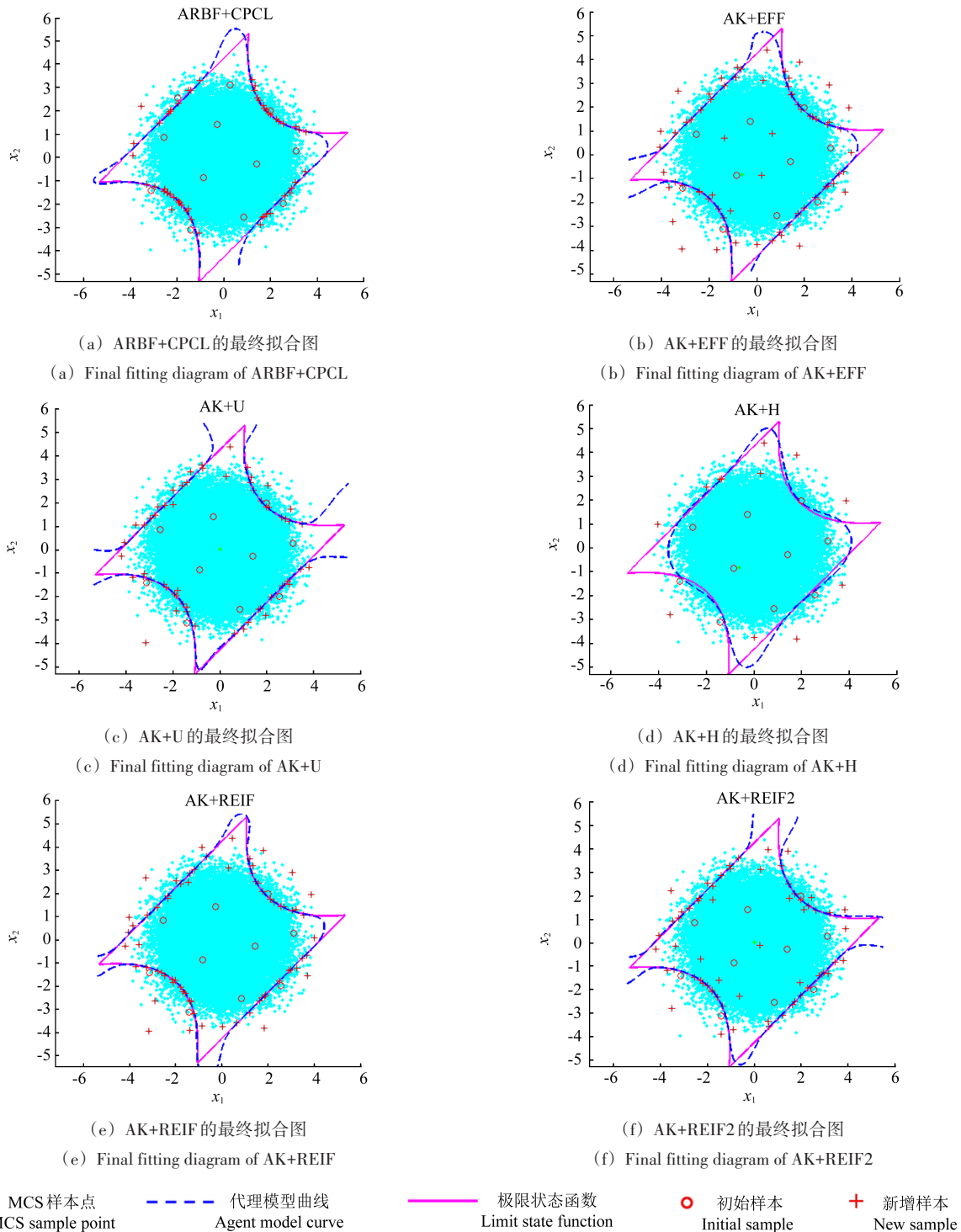


图3 可靠性分析方法的最终拟合图

Fig. 3 Final fitting diagram of the reliability analysis method

4.2 算例2

此算例是一个悬臂梁管,如图4所示,它承受着3个力 F_1 、 F_2 和 P ,与一个转矩 T ,它的功能函数定义为

$$g(x) = R_{\text{allow}} - R_{\text{max}} \quad (16)$$

式中, R_{allow} 为悬臂梁管的许用强度; R_{max} 为悬臂梁管承受的最大等效应力,它定义为

$$R_{\text{max}} = \sqrt{R_x^2 + 3\tau_{zx}^2}, R_x = \frac{P + F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2}{A} + \frac{Mc}{I}$$

式中, θ_1 为 5° ; θ_2 为 10° ; A 为悬臂梁管的横截面积; τ_{zx} 为

扭转应力; M 为弯矩; c 为半径; I 为转动惯量。这些变量定义如下:

$$M = F_1 L_1 \cos \theta_1 + F_2 L_2 \cos \theta_2, \tau_{zx} = \frac{Td}{2J},$$

$$I = \frac{\pi}{64} [d^4 - (d - 2t)^4], J = 2I$$

将上面的 9 个变量当作随机输入变量, 它们的概率分布特征和相关参数如表 2 所示。表 2 中, 对于正态分布和 Gumbel 分布, 参数 1 和参数 2 分别表示平均值和标准差。对于均匀分布, 参数 1 和参数 2 分别表示下界和上界。

表 1 算例 1 的可靠性分析结果

Tab. 1 Reliability analysis results of case 1

方法 Method	失效概率 Failure probability p_f	拟合样本数量 Fit sample size N_{call}	$e_{\pi}/10^{-3}$
MCS	7.59×10^{-3}	10^5	—
ARBF+CPCL	7.59×10^{-3}	66	0
AK+EFF	7.58×10^{-3}	78	1.317 5
AK+U	7.61×10^{-3}	67	2.635 0
AK+H	6.12×10^{-3}	22	—
AK+REIF	7.59×10^{-3}	79	0
AK+REIF2	7.58×10^{-3}	73	1.317 5

注: 表中 $e_{\pi} = |p_{\text{IMCS}} - p_f| / p_{\text{IMCS}}$, p_{IMCS} 是使用 MCS 方法计算的失效概率。
Note: $e_{\pi} = |p_{\text{IMCS}} - p_f| / p_{\text{IMCS}}$, p_{IMCS} is the failure probability evaluated by MCS method.

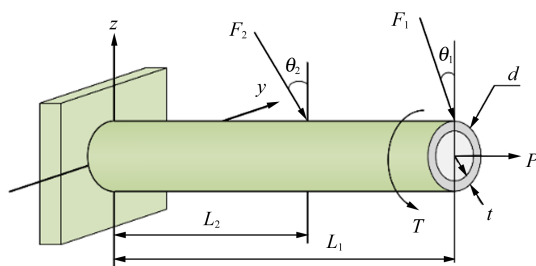


图 4 悬臂梁管

Fig. 4 Cantilevered beam tube

分别使用提出的 ARBF+CPCL 方法和其他的对比方法对此算例进行可靠性分析, 各种方法的计算结果如表 3 所示。由表 3 可以看出, 与对比方法相比, ARBF+CPCL 方法可以使用最少的拟合样本数量得到精确的可靠性分析结果, 验证了 ARBF+CPCL 方法可以高精度高效率地实现机械结构的可靠性分析。

5 涡轮盘的可靠性分析

涡轮盘是航空发动机的关键部件之一, 它的主要作用是安装叶片、传输功率。涡轮盘的工作环境十分恶劣, 在发动机高转速的作用下, 叶片及其自身质量

表 2 算例 2 输入变量的概率分布特征和相关参数

Tab. 2 Probability distribution characteristics and related parameters of case 2 input variables

输入变量 Input variable	参数 1 Parameter 1	参数 2 Parameter 1	分布类型 Distribution pattern
t/mm	5	0.1	正态分布 Normal distribution
d/mm	42	0.5	正态分布 Normal distribution
F_1/kN	3.0	0.3	正态分布 Normal distribution
F_2/kN	3.0	0.3	正态分布 Normal distribution
$T/(\text{N} \cdot \text{m})$	90.0	9.0	正态分布 Normal distribution
$R_{\text{cap}}/\text{MPa}$	220.0	22.0	正态分布 Normal distribution
L_1/mm	119.75	120.25	均匀分布 Uniform distribution
L_2/mm	59.75	60.25	均匀分布 Uniform distribution
P/kN	27.0	2.7	Gumbel 分布 Gumbel distribution

表 3 算例 2 的可靠性分析结果

Tab. 3 Reliability analysis results of case 2

方法 Method	失效概率 Failure probability p_f	N_{call}	$e_{\pi}/10^{-2}$
MCS	1.156×10^{-3}	5×10^5	—
ARBF+CPCL	1.156×10^{-3}	124	0
AK+EFF	1.156×10^{-3}	142	0
AK+U	1.156×10^{-3}	129	0
AK+H	1.156×10^{-3}	154	0
AK+REIF	1.156×10^{-3}	132	0
AK+REIF2	1.156×10^{-3}	143	0

产生了很大的离心力, 导致其承受着大的拉应力; 涡轮盘工作在高温的环境中, 在温度场和冷却系统的作用下, 导致其自身各个部分的温差较大, 产生了热应力, 并且还承受着气动力等。此外, 为得到高推重比, 要求涡轮盘等部件需要进行轻量化设计, 使涡轮盘的材料性能发挥到了极致。更重要的是, 这些复杂的工作环境 and 载荷 (温度、转速等), 材料性能参数 (弹性模量、泊松比和密度等), 制造尺寸等都具有不确定性, 这些给涡轮盘的安全运行带来了不确定^[21-22]。因此, 在涡轮盘的设计阶段, 对涡轮盘进行可靠性分析, 对涡轮盘的安全运行十分重要。

在此, 以某涡轮盘为研究对象, 其几何模型如图 5 所示, 以涡轮盘的材料参数和多物理场载荷为输入变量 (其概率分布特征及分布参数如表 4 所示), 对涡轮

盘的应力应变失效进行可靠性分析。涡轮盘是一个循环对称结构,为了减少有限元的计算量,如图5所示,选取涡轮盘的一个扇区(1/52),建立有限元模型,利用热-固耦合,进行应力分析,其应变分布和应力分布如图6所示。由图6可以看出,其应力、应变最大发生在涡轮盘的轮心处,其最大值分别达到了765 MPa和 4.2×10^{-3} 。

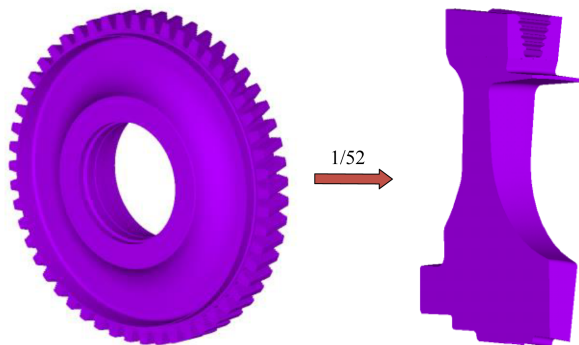


图5 涡轮盘的几何模型

Fig. 5 Geometric model of turbine disk

表4 涡轮盘输入变量的概率分布特征和相关参数

Tab. 4 Probability distribution characteristics and related parameters of turbine disk input variables

变量 Variable	均值 Mean value	标准差 Standard deviation	分布类型 Distribution pattern
弹性模量 Modulus of elasticity E/MPa	1.82×10^5	1.655×10^3	正态分布 Normal distribution
泊松比 Poisson's ratio μ	0.317 2	6.344×10^{-3}	正态分布 Normal distribution
密度 Density $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	8.21×10^3	1.642×10^2	正态分布 Normal distribution
线膨胀系数 Coefficient of linear expansion $\xi/^\circ\text{C}^{-1}$	1.39×10^{-5}	1.264×10^{-7}	正态分布 Normal distribution
外圆温度 Outer circle temperature $T_1/^\circ\text{C}$	650	13	正态分布 Normal distribution
内圆温度 Inner circle temperature $T_2/^\circ\text{C}$	360	7.2	正态分布 Normal distribution
转速 Rotate speed $\omega/(\text{rad}/\text{s})$	1 168	12.978	正态分布 Normal distribution

因为弹性模量等不确定性参数的影响,其应变失效和应力失效会在不同的时候发生。因此,针对两种失效模式分别建立功能函数:

$$\begin{aligned} g_1(E, \mu, \rho, \xi, T_1, T_2, \omega) &= R_{\text{allow}} - R \\ g_2(E, \mu, \rho, \xi, T_1, T_2, \omega) &= \varepsilon_{\text{allow}} - \varepsilon \end{aligned} \quad (17)$$

式中,许用应力 R_{allow} 为 825 MPa; $\varepsilon_{\text{allow}}$ 为 0.004 5。对于涡轮盘,任何一个失效模式发生,涡轮盘就发生失效,因此,这是一个串联系统,可以等价定义为

$$g(\mathbf{x}) = \min \{g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x})\} \quad (18)$$

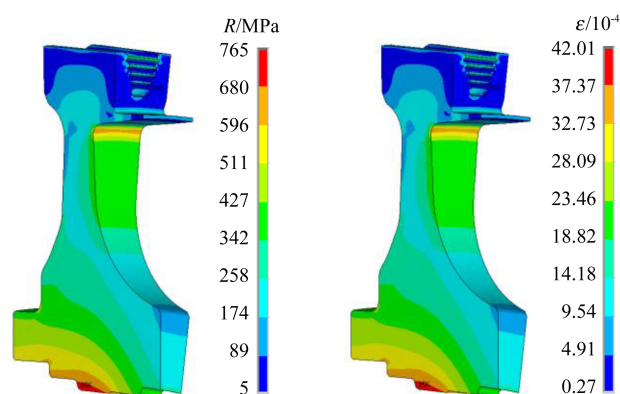


图6 应力和应变的分布云图

Fig. 6 Distribution nephogram of the stress and the strain

首先,基于各个输入变量的概率分布特征和相关参数,选取 1×10^5 个蒙特卡洛样本,其中弹性模量、泊松比、密度和线膨胀系数的频率/组距-概率密度函数如图7~图10所示。由图7~图10可以看出,各个变量抽取的样本都符合概率分布特征,说明了抽取样本的正确性。

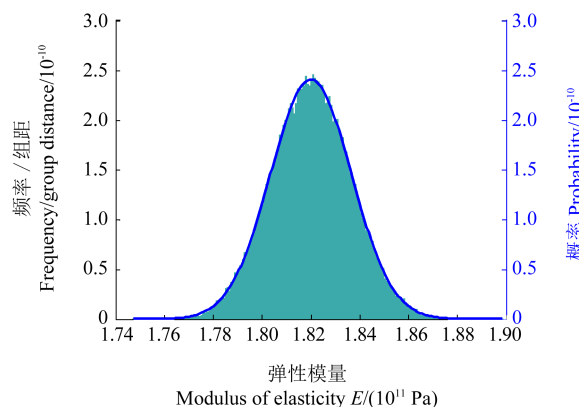


图7 弹性模量的频率/组距-概率密度函数图

Fig. 7 Diagram of frequency/group distance-probability density function for modulus of elasticity

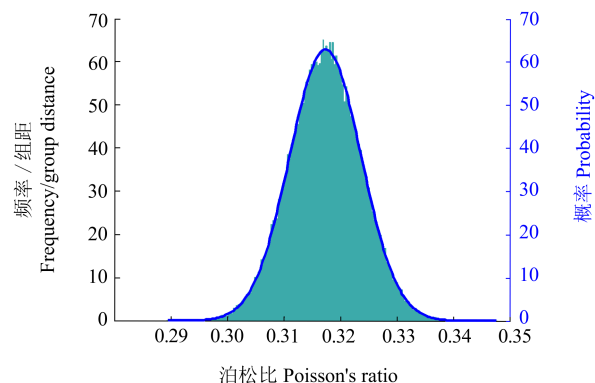


图8 泊松比的频率/组距-概率密度函数图

Fig. 8 Diagram of frequency/group distance-probability density function for Poisson's ratio

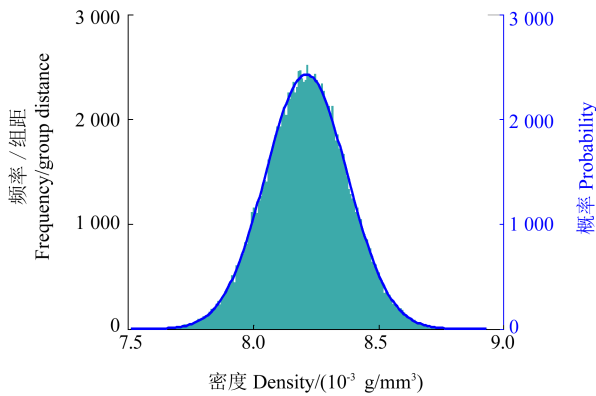


图9 密度的频率/组距-概率密度函数图

Fig. 9 Diagram of frequency/group distance-probability density function for the density

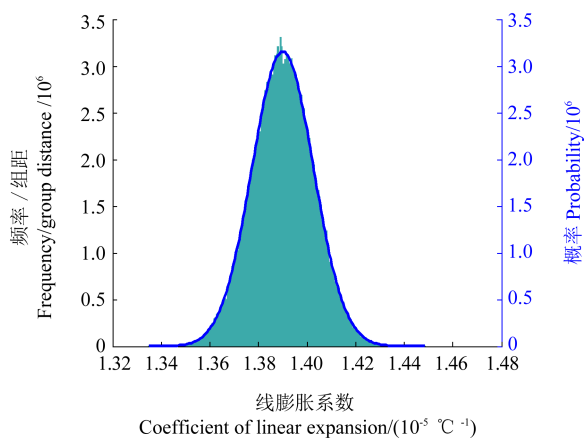


图10 线膨胀系数的频率/组距-概率密度函数图

Fig. 10 Diagram of frequency/group distance-probability density function for the coefficient of linear expansion

然后使用提出的 ARBF+CPCL 方法, 以及各种对比方法分别对涡轮盘结构的应力、应变失效进行可靠性分析, 其计算结果如表 5 所示。由表 5 可以看出, 提出的 ARBF+CPCL 方法和 AK+U 方法可以取得精确的可靠性计算结果, 但是 ARBF+CPCL 方法使用的拟合样本数量几乎是 AK+U 方法的 53%, 说明了 ARBF+CPCL 方法在保证可靠性分析精度的前提下可以大幅度提升计算效率。而其他的对比方法的可靠性分析结果都存在一定的误差, 且使用的拟合样本数量也比 ARBF+CPCL 方法多, 进一步说明了 ARBF+CPCL 方法在计算精度和计算效率上的优势。

通过对涡轮盘结构应力、应变失效模式的可靠性分析, 证明了 ARBF+CPCL 方法在实际工程中的应用能力。

6 结论

本文针对基于代理模型的可靠性分析方法, 从优秀拟合样本的空间位置约束出发, 分离并提取了面约束、距约束和域约束 3 个约束条件, 并且通过 3 个函数

表 5 涡轮盘可靠性分析结果

Tab. 5 Reliability analysis results of the turbine disk

方法 Method	失效概率 Failure probability p_f	N_{call}	$e_{\pi}/10^{-2}$
MCS	1.25×10^{-3}	10^5	—
ARBF+CPCL	1.25×10^{-3}	118	0
AK+EFF	1.19×10^{-3}	158	4.800 0
AK+U	1.25×10^{-3}	222	0
AK+H	1.21×10^{-3}	200	3.200 0
AK+REIF	1.24×10^{-3}	172	0.800 0
AK+REIF2	1.23×10^{-3}	327	1.600 0

来控制这 3 个约束, 然后根据 3 个约束及函数的要求, 有机地协同 3 个函数, 提出了协同-均值点约束学习函数 (CPCL), 结合增广径向基函数 (ARBF), 提出了一种高精度高效率的可靠性分析方法 ARBF+CPCL 方法。然后通过两个算例和涡轮盘的可靠性分析来证明 ARBF+CPCL 方法的优势与工程应用能力, 结果表明 CPCL 产生的样本点具有如下特点: ①在高概率密度区域; ②在极限状态函数附近; ③相互之间具有一定的距离。这些特点保证了 ARBF+CPCL 可靠性分析方法的高精度和高效率; 通过 3 个算例的计算结果, 证明了提出的 ARBF+CPCL 可靠性分析方法具有高精度、高效率进行可靠性分析的能力; 并且通过对涡轮盘进行可靠性分析, 验证了 ARBF+CPCL 可靠性分析具有解决实际工程问题的能力。

参考文献 (References)

- [1] 刘鑫, 龚敏, 周振华, 等. 基于证据理论的机械结构高效可靠性分析方法[J]. 中国机械工程, 2020, 31(17): 2031-2037.
LIU Xin, GONG Min, ZHOU ZhenHua, et al. Efficient reliability analysis method for mechanical structures based on evidence theory [J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(17): 2031-2037 (In Chinese).
- [2] 贾硕国, 剌昌峰, 张珂, 等. 基于改进综合因子分配法的行星减速器可靠性分配[J]. 机械强度, 2023, 45(5): 1141-1151.
JIA ShuoGuo, YAN ChangFeng, ZHANG Ke, et al. Reliability allocation of planetary reducer based on advanced integrated factors allocation method [J]. Journal of Mechanical Strength, 2023, 45(5): 1141-1151 (In Chinese).
- [3] SONG L K, BAI G C, FEI C W. Probabilistic LCF life assessment for turbine discs with DC strategy-based wavelet neural network regression [J]. International Journal of Fatigue, 2019, 119: 204-219.
- [4] 胡启国, 杜春超, 曹历杰, 等. 考虑多种故障状态的机械系统可靠性评估方法研究[J]. 机械强度, 2022, 44(2): 356-361.
HU QiGuo, DU ChunChao, CAO LiJie, et al. Research on reliability assessment method of mechanical system considering multiple failure states [J]. Journal of Mechanical Strength, 2022, 44(2): 356-

- 361(In Chinese).
- [5] FONG M, CHO S H, CHAN S L. Design of angle trusses by codes and second-order analysis with experimental verification [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2009, 65(12):2140-2147.
- [6] ROYSDON P F. Blended wing body lateral-directional stability investigation using 6DOF simulation [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2014, 228(1):7-19.
- [7] IBRAHIM Y. Observations on applications of importance sampling in structural reliability analysis [J]. Structural Safety, 1991, 9(4):269-281.
- [8] MAO J X, HU D Y, LI D, et al. Novel adaptive surrogate model based on LRPIM for probabilistic analysis of turbine disc [J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 70:76-87.
- [9] SONG L K, WEN J, FEI C W, et al. Distributed collaborative probabilistic design of multi-failure structure with fluid-structure interaction using fuzzy neural network of regression [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 104:72-86.
- [10] GAVIN H P, YAU S C. High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis [J]. Structural Safety, 2008, 30(2):162-179.
- [11] LV Z Y, LU Z Z, WANG P. A new learning function for Kriging and its applications to solve reliability problems in engineering [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(5):1182-1197.
- [12] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation [J]. Structural Safety, 2011, 33(2):145-154.
- [13] JING Z, CHEN J Q, LI X. RBF-GA: an adaptive radial basis function metamodeling with genetic algorithm for structural reliability analysis [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 189:42-57.
- [14] SHI L J, SUN B B, IBRAHIM D S. An active learning reliability method with multiple kernel functions based on radial basis function [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 60(1):211-229.
- [15] MINASNY B, MCBRATNEY A B. A conditioned Latin hypercube method for sampling in the presence of ancillary information [J]. Computers & Geosciences, 2006, 32(9):1378-1388.
- [16] LING C Y, LU Z Z, SUN B, et al. An efficient method combining active learning Kriging & Monte Carlo simulation for profust failure probability [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 387:89-107.
- [17] SONG K L, ZHANG Y G, YU X S, et al. A new sequential surrogate method for reliability analysis and its applications in engineering [J]. IEEE Access, 2019, 7:60555-60571.
- [18] ZHANG X F, WANG L, SØRENSEN J D. REIF: a novel active-learning function toward adaptive Kriging surrogate models for structural reliability analysis [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 185:440-454.
- [19] VIANA F A C, VENTER G, BALABANOV V. An algorithm for fast optimal Latin hypercube design of experiments [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 82(2):135-156.
- [20] BICHON B J, ELDRED M S, SWILER L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions [J]. AIAA Journal, 2008, 46(10):2459-2468.
- [21] 王大伟, 苗学问, 洪杰. 某发动机涡轮叶片使用寿命可靠性分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(8):903-907.
WANG DaWei, MIAO XueWen, HONG Jie. Reliability analysis of turbine blade service life of an engine [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(8):903-907 (In Chinese).
- [22] ZHU S P, FOLETTI S, BERETTA S. Probabilistic framework for multiaxial LCF assessment under material variability [J]. International Journal of Fatigue, 2017, 103:371-385.