

半内凹蜂窝结构的等效理论和拉伸性能研究*

RESEARCH ON THE EQUIVALENT THEORIES AND TENSION PROPERTIES OF SEMI-REENTRANT HONEYCOMB STRUCTURE

许桢一**¹ 郭子健² 常雨昕¹ 陈嘉程¹ 郭栋权***¹

(1. 中国民航大学 中欧航空工程师学院, 天津 300300)

[2. 包头铝业(集团)有限责任公司, 包头 014046]

XU ZhenYi¹ WU ZiJian² CHANG YuXin¹ CHEN JiaCheng¹ WU DongQuan¹

(1. Sino-European Institute of Aviation Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

[2. Baotou Aluminium(Group) Co., Ltd., Baotou 014046, China]

摘要 半内凹蜂窝结构具有零泊松比等特性,是六边形蜂窝结构和内凹蜂窝结构组成的混合形式。因此,半内凹蜂窝单元的变形特性可以通过六边形蜂窝单元(正角度)和内凹蜂窝单元(负角度)的变形耦合获得。基于六边形蜂窝单元和内凹蜂窝单元的弯曲、拉伸、铰接和剪切变形等不同机制,考虑单元壁厚的影响,建立了半内凹蜂窝单元的变形机制,并推导出半内凹蜂窝结构的面内变形力学性能等效理论,实现对其面内不同方向弹性模量和泊松比的预测。利用有限元方法分析了几何参数(倾斜臂长 l 、垂直臂长 h 、角度 α 、角度 β 、结构厚度 d 和单元壁厚 t)对半内凹蜂窝结构的面内拉伸性能(弹性模量和泊松比)的影响。对比有限元模拟结果与等效理论预测结果,验证了等效理论模型的有效性和准确性。对比不同等效理论预测结果,表明完善考虑不同变形机制以及壁厚影响,对于准确预测面内拉伸性能的重要性。

关键词 半内凹蜂窝 等效理论 有限元法 弹性模量 泊松比 拉伸性能

中图分类号 TK225

Abstract The semi-reentrant honeycomb structure has the characteristics of zero Poisson's ratio, and is a hybrid form composed of hexagonal honeycomb structure and reentrant honeycomb structure. Therefore, the deformation characteristics of a semi-reentrant honeycomb cell can be obtained through deformation coupling of a hexagonal honeycomb cell (with a positive angle) and a reentrant honeycomb cell (with a negative angle). Based on the different mechanisms of bending, tensile, hinge, and shear deformation of hexagonal honeycomb cells and reentrant honeycomb cells, and considering the influence of the cell wall thickness, a deformation mechanism of semi-reentrant honeycomb cells was established. An equivalent theory of mechanical properties of in-plane deformation was derived to predict its elastic modulus and Poisson's ratio in different directions in the plane. The effects of geometric parameters (tilt arm length l , vertical arm length h , angle α , angle β , structure thickness d and unit wall thickness t) on in-plane tensile properties (elastic modulus and Poisson's ratio) of semi-reentrant honeycomb structure were analyzed using the finite element method. By comparing the finite element simulation results with the prediction results of the equivalent theory, the effectiveness and accuracy of the equivalent theoretical model were verified. Comparing the prediction results of different equivalent theories shows the importance of considering the effects of different deformation mechanisms and wall thickness to accurately predict in-plane tensile properties.

Key words Semi-reentrant honeycomb structure; Equivalent theory; Finite element method; Elastic modulus; Poisson's ratio; Tension properties

Corresponding author: WU DongQuan, E-mail: dqwu@cauc.edu.cn

The project supported by the Scientific Research Program of Tianjin Education Commission (No.2021KJ053), and the College Student Innovation and Entrepreneurship Training Program from Civil Aviation University of China (No.202210059117).

Manuscript received 20230208, in revised form 20230407.

*20230208收到初稿, 20230407收到修改稿。天津市教委科研计划项目(2021KJ053), 中国民航大学大学生创新训练计划项目(202210059117)资助。

**许桢一, 男, 2001年生, 安徽芜湖人, 汉族, 中国民航大学中欧航空工程师学院本科生, 主要研究方向为轻量化结构。

***郭栋权(通信作者), 男, 1991年生, 内蒙古呼和浩特人, 汉族, 中国民航大学中欧航空工程师学院讲师, 博士, 主要研究方向为轻量化结构。

0 引言

蜂窝结构由于其质量轻、刚度高、稳定性好、制造成本低等优点,被广泛用作平面夹芯板的芯材。由于六边形蜂窝结构具有正泊松比,所以在面外弯曲过程中会产生反向曲率或鞍形曲率(图 1)^{[1][2]403-422}。而内凹蜂窝结构具有负泊松比和同向曲率(图 1)以及典型的拉胀性能^[3-5],在面外弯曲时会形成圆顶形结构。GRIMA J N 等^{[6]855-862[7]}依据六边形蜂窝结构和内凹蜂窝结构组合特点,提出了一种混合结构,即半内凹蜂窝结构,它结合了蜂窝单元和内凹单元(图 2),在一个方向上的泊松比为 0,在正交方向上的弹性模量较高。半内凹蜂窝在面外弯曲过程中会产生圆柱形曲面,或者在面外加载时具有单曲率或管状变形,如图 1 所示,这是六边形蜂窝或内凹蜂窝结构无法实现的特性。因此,半内凹蜂窝结构在某些应用领域具有更加优异的性能和特性,目前也得到了相关研究的关注^[8]。

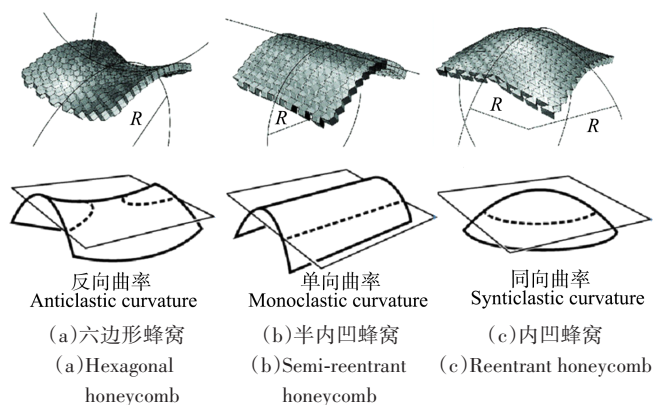


图 1 三种不同蜂窝结构弯曲曲率

Fig. 1 Three types of bending curvatures for different honeycomb structures

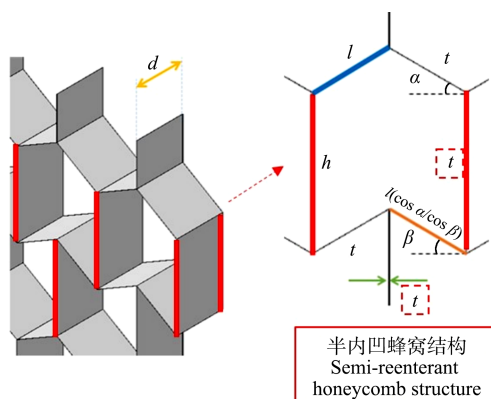


图 2 半内凹蜂窝结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the semi-reentrant honeycomb structure

对于蜂窝结构,其面内泊松比取决于结构的几何构型,而弯曲刚度则与变形机制或材料特性有关^[9-10]。蜂窝结构薄壁的弯曲和拉伸以及薄壁连接处的铰链作用一般被认为是主要的变形机制。基于这些机制,研究人员针对特定结构建立了相应的面内弹性模量等

效理论模型。有研究使用单元中薄壁的挠度/应变来预测整个六边形蜂窝结构的拉伸特性,并建立了针对弹性模量和泊松比的预测模型,这些模型与实验数据吻合良好^[11]。在此基础上,相关研究^[12]考虑剪切变形以及弯曲变形和拉伸影响后,建立了新的预测模型,该模型显著提高了预测精度。此外,学者已经提出了通过考虑弯曲、拉伸或铰链变形来评估蜂窝结构的面内特性的不同方法^[13-14],其中弯曲变形通常被认为是主要的变形机制,拉伸和铰接也有一定贡献。MASTERS I G 等^{[2]403-422}提出了基于弯曲、拉伸和铰接变形的六边形蜂窝结构理论模型。对于具有负泊松比或拉胀性质的内凹蜂窝结构,其等效理论的表达式可通过将负角度代入六边形蜂窝结构的变形方程中来获得。最近,基于理想化机制,ZHANG J J 等^[15]发展了新的预测理论模型,模型考虑了薄壁的塑性、非线性变形行为,并与有限元模拟结果对比,验证了模型有效性。WANG X T 等^[16]提出了基于能量法的三维内凹蜂窝结构的弹性模量和泊松比等效模型,并使用具有周期边界条件的单元模型进行了数值计算,验证了预测结果的准确性。WAN H 等^[17]基于大挠度模型,提出了一种预测膨胀蜂窝负泊松比的理论方法,推导出了两个正交方向上的挠度曲线、膨胀蜂窝的应变和泊松比的方程,对三维内凹蜂窝结构的变形机制有较好的预测效果。CHEN Q 等^[18]建立了新型纳米蜂窝和分层结构的线弹性和屈曲响应,然后通过添加倾斜壁,提出了增强型内凹结构,并建立了其弹性模量和泊松比预测模型,该模型具有较好的预测能力^[19]。然而,目前关于半内凹蜂窝结构的等效理论研究还处于起步阶段,相关面内力学性能预测模型还比较少见。GRIMA J N 等^{[6]855-862}提出了一个简单模型,用于预测此类结构的泊松比和模量,但是该模型仅考虑了单元的弯曲变形,预测的准确度不够,需建立更为准确的等效理论预测模型。

因此,本文针对半内凹蜂窝结构在面内力学性能和变形特性,通过耦合六边形蜂窝单元和内凹蜂窝单元的弯曲、拉伸、铰接和剪切变形等不同机制,考虑单元壁厚影响,建立半内凹蜂窝单元的变形机制,并推导出半内凹蜂窝结构的面内变形力学性能等效理论,实现对其面内不同方向弹性模量和泊松比的预测。其次利用有限元方法分析几何参数(臂长倾斜 l 、垂直臂长 h 、角度 α 、角度 β 、结构厚度 d 和单元壁厚 t)对半内凹蜂窝结构的面内拉伸性能(弹性模量和泊松比)的影响,并通过对比有限元模拟结果与等效理论预测结果,验证等效理论模型的有效性和准确性。通过对比不同等效理论预测结果,表明完善考虑不同变形机制以及壁厚影响,对于准确预测面内拉伸性能的重要性。

1 半内凹蜂窝结构等效理论

1.1 等效密度

半内凹蜂窝单元的几何形状如图3所示。其中, d 为结构的厚度或深度; l, h 分别为倾斜臂的长度和垂直臂的长度; t 为细胞壁的厚度; α 和 β 为倾斜臂和垂直臂之间的两个角度。对于半内凹蜂窝结构, 其实际质量 $m_c = V_c \rho_c = V_A \rho_A$ 。式中, V_A 为单位单元中材料的实际体积; ρ_A 为用于结构的材料密度。半内凹蜂窝结构的单元结构体积为 $V_c = l d \cos \alpha (l \sin \alpha + 2h - l \cos \alpha \tan \beta)$ 。半内凹蜂窝结构的相对密度可以表示为 $\rho_c / \rho_A = \frac{m_c}{V_c} / \rho_A = \frac{V_A}{V_c}$ 。因此对于单壁厚的蜂窝结构, 其实际材料所占体积为

$$V_A = \frac{1}{2} (2l + 2l \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + 2h) t d = (l + l \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + h) t d \quad (1)$$

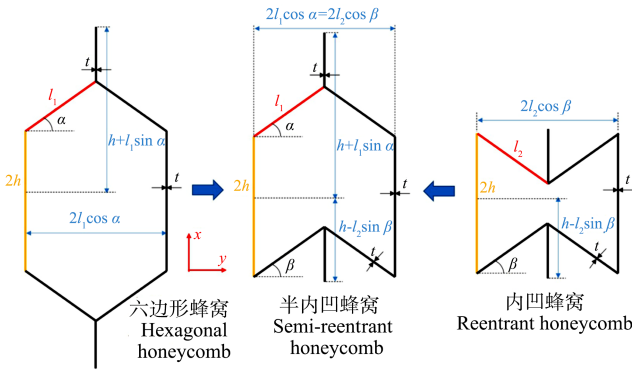


图3 蜂窝单元几何尺寸和坐标系

Fig. 3 Cell geometry size and coordinate system used for honeycomb

等效密度可以表示为

$$\rho_c / \rho_A = t (l + l \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + h) / [l \cos \alpha (l \sin \alpha + 2h - l \cos \alpha \tan \beta)] \quad (2)$$

1.2 等效面外弹性模量

面外弹性模量可以通过 z 方向力的等效来计算。如图2所示, z 方向的力等效为 $F_z = E_s S_s = E_3 S_3$ 。式中, E_s 为蜂窝材料的弹性模量; S_s 为蜂窝结构在 xy 平面中的截面积; E_3 为半内凹结构的等效弹性模量; S_3 为半内凹结构在 xy 平面中的截面面积。其中

$$S_s = [(2l_1 \times \frac{1}{2}) + (2l_2 \times \frac{1}{2}) + (2h \times \frac{1}{2})] t = (h + l_1 + l_1 \cos \alpha \tan \beta) t \quad (3)$$

$$E_3 = E_s S_s / S_3 = (h + l_1 + l_1 \cos \alpha \tan \beta) t E_s / [l_1 (2h - 2l_1 \cos \alpha \tan \beta + l_1 \sin \alpha) + l_1^2 \cos^2 \alpha \tan \beta] \quad (4)$$

1.3 等效面内弹性模量和泊松比

MASTERS I G 等^{[2]403-422}发展了基于弯曲、拉伸和铰接变形预测六边形蜂窝结构的弹性模量和泊松比的等效理论模型。该理论也可以应用于具有负角度的内凹蜂窝结构。对于新型半内凹蜂窝结构, 可以考虑通过六边形蜂窝单元和内凹蜂窝单元的组合来建立理论模型(图3)。此外, 考虑剪切变形的TIMOSHENKO S P梁

理论^[20]在计算拉伸特性时也适用于蜂窝结构。另外如文献[21-22]所述, 蜂窝结构的壁厚对变形的影响也很显著。因此, 将这些不同的机制(弯曲、拉伸、铰接和剪切变形以及壁厚的影响)结合在一起, 可以获得针对半内凹蜂窝结构的弹性模量和泊松比预测模型。注意, 本研究中的所有等效分析均基于弹性小变形。

需要注意的是, 对于内凹蜂窝单元部分, 当 $h - l_2 \sin \beta > h/2$ 时, 单元尺寸应为 $h - l_2 \sin \beta$; 当 $h - l_2 \sin \beta < h/2$ 时, 单元尺寸为 $l_2 \sin \beta$ 。这里 $l_1 \sin \alpha = l_2 \sin \beta$ 。

1.3.1 x 方向的弹性模量 E_1 和泊松比 ν_{12}

对于沿 x 方向加载的六边形蜂窝结构, 斜壁中的远端力可以表示为 $W_1 = \sigma_x d (l_1 \cos \alpha + t/2)$ 。其弯曲变形为 $\delta_f = \frac{W_1 l_1^3 \cos \alpha}{E_s dt^3}$; 拉伸变形: 斜壁变形为 $\delta_{st-i} = \frac{W_1 l_1 \sin \alpha}{E_s dt}$, 直壁变形为 $\delta_{st-v} = \frac{W_1 h}{E_s dt}$; 剪切变形为 $\delta_{sh} = \frac{W_1 l_1 \cos \alpha (2.4 + 1.5\nu_s)}{E_s dt}$; 铰链变形为 $\delta_h = \frac{W_1 \cos \alpha}{K_{h1}} = \frac{6W_1 l_1^2 q_1 \cos \alpha}{E_s dt^3}$ 。则六边形蜂窝结构沿 x 和 y 方向的总变形为

$$\delta_1 = \delta_f \cos \alpha + \delta_{sh} \cos \alpha + \delta_{st-i} \sin \alpha + \delta_{st-v} + \delta_h \cos \alpha = \frac{W_1 l_1 \cos^2 \alpha}{E_s dt} \left[\frac{l_1^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{h}{l_1 \cos^2 \alpha} + (2.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_1 q_1}{t^2} \right] \quad (5)$$

$$\delta_2 = -\delta_f \sin \alpha - \delta_{sh} \sin \alpha + \delta_{st-i} \cos \alpha - \delta_h \sin \alpha = \frac{-W_1 l_1 \sin \alpha \cos \alpha}{E_s dt} \left[\frac{l_1^2}{t^2} + (1.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_1 q_1}{t^2} \right] \quad (6)$$

对于 x 方向加载的内凹蜂窝结构, 使用负角度 $-\beta$ 和 l_2 分别代替式(5)、式(6)中的正角度 α 和 l_1 , 可以获得内凹蜂窝结构在不同变形机制下的变形。因此, 对于沿 x 方向加载的半内凹蜂窝结构, 弯曲、拉伸和剪切变形引起的总挠度可以用六边形蜂窝和内凹蜂窝的总和表示, 为

$$\delta_1 = W_1 l_1 \cos^2 \alpha \left[\frac{l_1^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{h}{l_1 \cos^2 \alpha} + (2.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_1 q_1}{t^2} \right] / (E_s dt) + W_2 l_2 \cos^2 \beta \left[\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{h}{l_2 \cos^2 \beta} + (2.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_2 q_2}{t^2} \right] / (E_s dt) \quad (7)$$

$$\delta_2 = \max \left\{ \frac{-W_1 l_1 \sin \alpha \cos \alpha}{E_s dt} \left[\frac{l_1^2}{t^2} + (1.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_1 q_1}{t^2} \right], \frac{W_2 l_2 \sin \beta \cos \beta}{E_s dt} \left[\frac{l_2^2}{t^2} + (1.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_2 q_2}{t^2} \right] \right\} = \frac{W_2 l_2 \sin \beta \cos \beta}{E_s dt} \left[\frac{l_2^2}{t^2} + (1.4 + 1.5\nu_s) + \frac{6l_2 q_2}{t^2} \right] \quad (8)$$

那么 x 和 y 方向上的应变可以描述为

$$\varepsilon_1 = \delta_1 / (2h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta}) = \sigma_x l_1 \cos \alpha (l_1 \cos \alpha + t') [\cos \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{h}{l_1 \cos^2 \alpha} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) + \cos \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{h}{l_2 \cos^2 \beta} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{6l_2 q_2}{t^2})] / [E_s t (2h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta})] \quad (9)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{l_1 \cos \alpha + t'} = \sigma_x l_2 \sin \beta \cos \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s + \frac{6l_2 q_2}{t^2}) / (E_s t) \quad (10)$$

因此

$$E_1 = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_1} = E_s t (2h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta}) / \left\{ l_1 \cos \alpha (l_1 \cos \alpha + t') [\cos \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{h}{l_1 \cos^2 \alpha} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) + \cos \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{h}{l_2 \cos^2 \beta} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{6l_2 q_2}{t^2})] \right\} \quad (11)$$

$$v_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -(2h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta}) \sin \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s + \frac{6l_2 q_2}{t^2}) / \left\{ (l_1 \cos \alpha + t') [\cos \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{h}{l_1 \cos^2 \alpha} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) + \cos \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{h}{l_2 \cos^2 \beta} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{6l_2 q_2}{t^2})] \right\} \quad (12)$$

1.3.2 y 方向的弹性模量 E_2 和泊松比 ν_{21}

对于沿 y 方向加载的六边形蜂窝结构, 斜壁中的远程力可以表示为 $P_1 = \sigma_y d (l_1 \sin \alpha + h)$ 。其弯曲变形为

$\delta_f = \frac{P_1 l_1^3 \sin \alpha}{E_s dt^3}$; 拉伸变形: 直壁变形为 $\delta_{st} = \frac{P_1 l_1 \cos \alpha}{E_s dt}$; 剪

切变形为 $\delta_{sh} = \frac{P_1 l_1 \sin \alpha (2.4 + 1.5v_s)}{E_s dt}$; 铰链变形 $\delta_h =$

$\frac{P_1 \sin \alpha}{K_{h1}} = \frac{6P_1 l_1^2 q_1 \sin \alpha}{E_s dt^3}$ 。则六边形蜂窝结构沿 x 和 y 方

向的总变形为

$$\delta_1 = -\delta_f \cos \alpha - \delta_{sh} \cos \alpha + \delta_{st} \sin \alpha + \delta_h \cos \alpha = \frac{-P_1 l_1 \cos \alpha \sin \alpha}{E_s dt} (\frac{l_1^2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) \quad (13)$$

$$\delta_2 = \delta_f \sin \alpha + \delta_{sh} \sin \alpha + \delta_{st} \cos \alpha + \delta_h \sin \alpha = \frac{P_1 l_1 \sin^2 \alpha}{E_s dt} (\frac{l_1^2}{t^2} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) \quad (14)$$

对于 x 方向加载的内凹蜂窝结构, 使用负角 $-\beta$ 和 l_2 加载的半内凹蜂窝结构, 弯曲、拉伸和剪切变形引起的分别代替式(13)、式(14)中的 α 和 l_1 , 可以获得内凹蜂窝结构的总挠度可以用六边形蜂窝和内凹蜂窝的总和表示, 为

$$\delta_1 = \frac{-P_1 l_1 \cos \alpha \sin \alpha}{E_s dt} (\frac{l_1^2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) + \frac{P_2 l_2 \cos \beta \sin \beta}{E_s dt} (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{6l_2 q_2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s) \quad (15)$$

$$\delta_2 = \max [\frac{P_1 l_1 \sin^2 \alpha}{E_s dt} (\frac{l_1^2}{t^2} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{6l_1 q_1}{t^2}), \frac{P_2 l_2 \sin^2 \beta}{E_s dt} (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{6l_2 q_2}{t^2} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta})] \quad (16)$$

那么 x 和 y 方向上的应变可以描述为

$$\varepsilon_1 = \delta_1 / (2h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta}) = l_1 \cos \alpha \sigma_y [-(l_1 \sin \alpha + h) \sin \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s + \frac{6l_1 q_1}{t^2}) + (-l_2 \sin \beta + h) \sin \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{6l_2 q_2}{t^2} + 1.4 + 1.5v_s)] / [E_s t (2h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta})] \quad (17)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{l_1 \cos \alpha + t'} = \max [\sigma_y (l_1 \sin \alpha + h) l_1 \sin^2 \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{6l_1 q_1}{t^2}), \sigma_y (-l_2 \sin \beta + h) l_2 \sin^2 \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{6l_2 q_2}{t^2} + 2.4 + 1.5v_s + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta})] / [E_s t (l_1 \cos \alpha + t')] \quad (18)$$

因此

$$E_2 = E_s t (l_1 \cos \alpha + t') / \max [(l_1 \sin \alpha + h) l_1 \sin^2 \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + 2.4 + 1.5 v_s + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{6 l_1 q_1}{t^2}),$$
$$(-l_2 \sin \beta + h) l_2 \sin^2 \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{6 l_2 q_2}{t^2} + 2.4 + 1.5 v_s + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta})]$$

(19)

$$v_{12} = (-l_1 \cos \alpha + t') [-(l_1 \sin \alpha + h) l_1 \cos \alpha \sin \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + 1.4 + 1.5 v_s + \frac{6 l_1 q_1}{t^2}) + (-l_2 \sin \beta + h) l_2 \cos \beta \sin \beta (\frac{l_2^2}{t^2} +$$
$$\frac{6 l_2 q_2}{t^2} + 1.4 + 1.5 v_s)] / \max [(l_1 \sin \alpha + h) l_1 \sin^2 \alpha (\frac{l_1^2}{t^2} + 2.4 + 1.5 v_s + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{6 l_1 q_1}{t^2}), (-l_2 \sin \beta + h)$$
$$l_2 \sin^2 \beta (\frac{l_2^2}{t^2} + \frac{6 l_2 q_2}{t^2} + 2.4 + 1.5 v_s + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta})] (2 h + l_1 \sin \alpha - l_1 \cos \alpha \tan \beta + \frac{t}{2 \cos \alpha} + \frac{t}{2 \cos \beta})$$

(20)

2 结果与分析

为了验证上述等效理论的准确性,对不同几何参数的半内凹蜂窝结构进行了拉伸试验模拟,获取相应模型的弹性模量和泊松比,并与等效理论的预测进行

了比较。沿 x 或 y 方向拉伸试验模拟的典型有限元模型如图 4 所示,整个拉伸试样由半内凹蜂窝结构和刚性夹持端组成。耐热钢 316L 的力学性能用于有限元模拟,具体参数如表 1 所示。模拟中使用了 5 种不同几何参数的结构,详细参数见表 2。

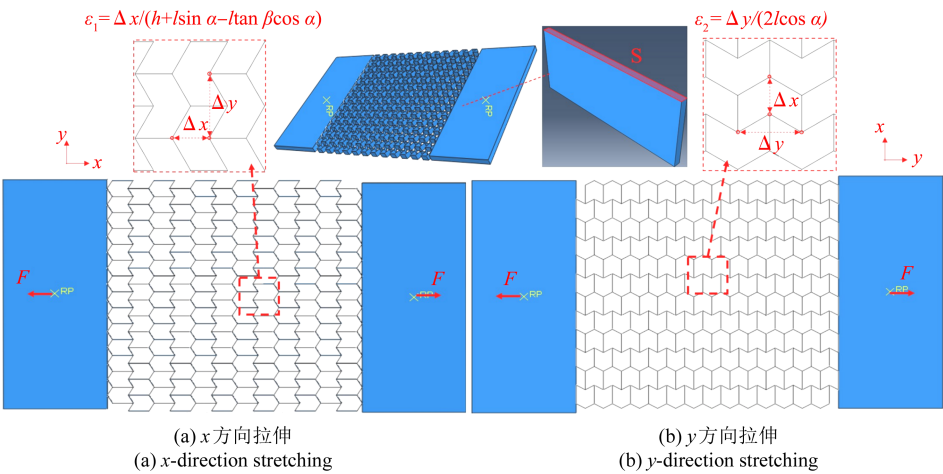


图 4 沿 x 、 y 方向拉伸模拟的典型有限元模型
Fig. 4 Typical finite element model for tension simulation in x and y directions

表 1 316L 的材料力学性能

Tab. 1 Material mechanical property of 316L

弹性模量 Elastic modulus E /MPa	屈服强度 Yield strength σ_0 /MPa	抗拉强度 Tensile strength σ_u /MPa	泊松比 Poisson's ratio ν	密度 Density ρ /(kg/m ³)
121 250	546	807	0.3	7 900

表 2 半内凹蜂窝结构沿 x 和 y 方向拉伸力学性能

Tab. 2 Tension mechanical property for semi-reentrant honeycomb structures in x and y directions

编号 No.	斜壁长 Inclined wall length l /mm	直壁长 Straight wall length h /mm	夹角 Angle α /(°)	夹角 Angle β /(°)	蜂窝厚度 Honeycomb thickness d /mm	壁厚 Wall thickness t /mm	E_1 /MPa	ν_{21}	E_2 /MPa	ν_{12}	FE- E_1 /MPa	FE- ν_{21}	FE- E_2 /MPa	FE- ν_{12}
1	2	2	30	30	2	1	8 550.1	-0.411 6	18 028	0.412 1	8 684.6	-0.343 6	18 359	0.413 4
2	2	2	60	60	2	1	37 129	-1.640 9	4 520.2	0.102 6	37 254	-1.536 6	4 665.2	0.010 0
3	2	12	30	60	2	1	21 321	-4.536 3	632.9	-0.042 4	20 246	-4.036 3	682.9	-0.045 0
4	8	12	30	60	2	1	277.2	-3.971 3	277.5	0.447 1	269.2	-3.171 3	301.5	0.501 5
5	8	12	30	30	2	1	318.1	-0.887 5	277.5	0.262 9	311.3	-0.712 9	279.4	0.283 2

半内凹蜂窝结构的宽度和高度均为 50 mm,刚性夹持端的宽度和高度分别为 20 mm 和 50 mm。结构和刚

性夹持端的厚度均为 4 mm。刚性夹持端的网格与半内凹蜂窝结构网格在 Interaction 模块中绑定。在右侧刚

性夹持端的参考点上施加特定的载荷位移,左侧刚性夹持端的参考点完全固定。刚性夹持端采用C3D8R实体单元网格,半内凹蜂窝结构采用SR4壳单元网格。

有限元结果提取的应力,是通过刚性夹持端的反作用力 F 计算的 (S 是截面积,因此应力为 σ_1 或 $\sigma_2 = F/S$)。应变 [$\varepsilon_1 = \Delta x / (h + l \sin \alpha - l \tan \beta \cos \alpha)$, $\varepsilon_2 = \Delta y / (2l \cos \alpha)$] 利用位移 (Δx 和 Δy) 计算。图 5 为典型的半

内凹蜂窝结构拉伸后的变形云图。在结构的中心位置上的两个节点之间,获取每个试样拉伸过程中的弹塑性应力-应变关系(图 5),并计算了沿两个方向应变的泊松比($\nu_{21} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ 和 $\nu_{12} = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$)。弹性模量可通过应力-应变曲线线性部分的应力应变比($E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1$ 和 $E_2 = \sigma_2 / \varepsilon_2$)计算,不同条件下的最终结果汇总在表 2 中。

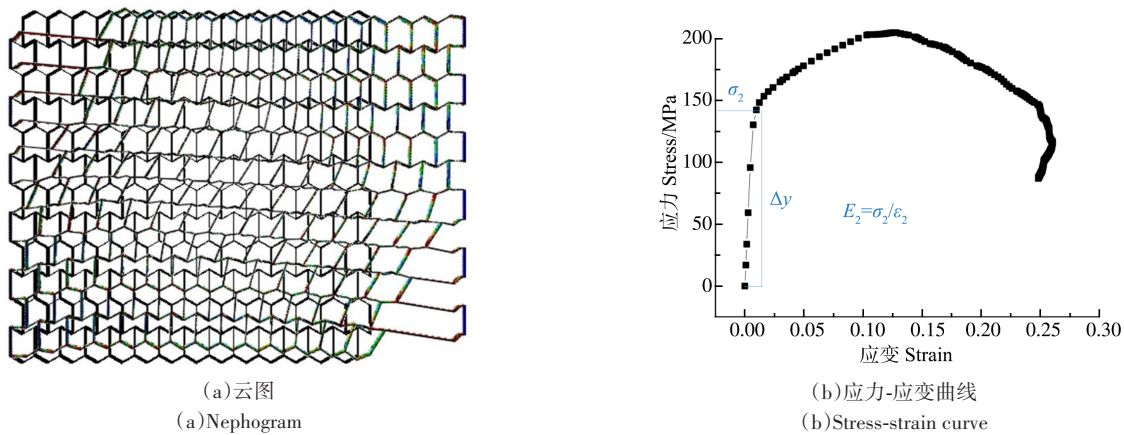


图 5 半内凹蜂窝结构沿 y 向拉伸变形后云图及应力-应变曲线

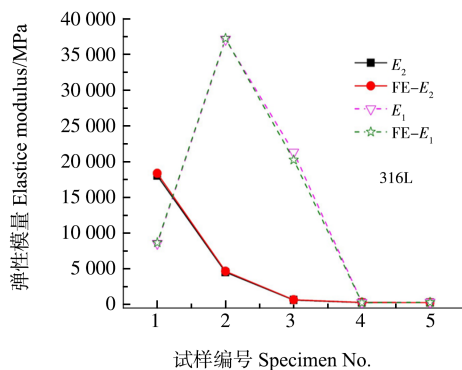
Fig. 5 Nephogram and strain-stress curve of semi-reentrant honeycomb structure after tension deformation in y direction

图 6 比较了等效理论预测的弹性模量和泊松比结果及有限元模拟结果。由图 6 可以发现,无论是弹性模量还是泊松比,无论是沿 x 方向还是 y 方向,等效理论预测结果与有限元模拟结果都具有非常好的适用性和准确性,预测数据与有限元数据误差较小,弹性模量误差不超过 1.3 倍误差带,泊松比误差不超过 1.4 倍误差带,而且对于绝大多数的弹性模量数据,误差均不超过 1.1 倍误差带。这是由于等效理论考虑完整的变形机制(包括弯曲、拉伸、铰接和剪切变形以及壁厚影响),该预测模型可以较好地预测内凹蜂窝结构的面内弹性模量和泊松比。这也说明实际结构的变形条件与该等效理论中所涉及的组合变形机制之间具有较好的一致性。

此外,图 7 比较了不同几何参数下半内凹蜂窝结

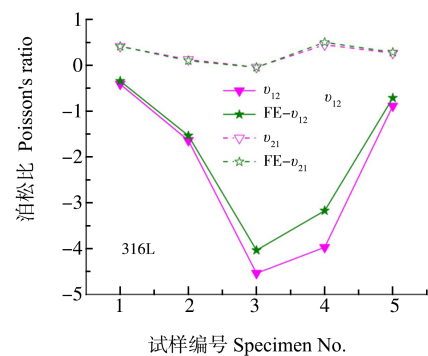
构的等效理论预测变形量数值和有限元模拟变形量结果。如图 7 所示,有限元模拟中的挠度是通过变形结构的后处理获得的。由图 7 可以发现,挠度预测与有限元结果非常接近,这进一步证明了本文的等效理论在预测半内凹蜂窝结构的面内弹性模量和泊松比方面是有效和准确的。

此外,本文进一步对比了不同等效理论预测模型的预测结果。三类等效理论的预测模型分别采用了不同的变形机制,如表 3 所示。其中预测模型 1(T_1)仅考虑弯曲变形机制的影响,这是 GRIMA J N 等^{[6]855-862}建立的预测模型;预测模型 2(T_2)考虑弯曲变形、拉伸变形和铰链变形机制的影响,这是以 MASTERS I G 等^{[2]403-422}建立的预测模型而得到的耦合形式;预测模型 3(T_3)综合考虑弯曲变形、拉伸变形、铰链变形和剪切变形机制



(a) 弹性模量预测结果与有限元模拟结果对比

(a) Comparison between predicted elastic modulus results with FE results



(b) 泊松比预测结果与有限元模拟结果对比

(b) Comparison between predicted Poisson's ratio results with FE results

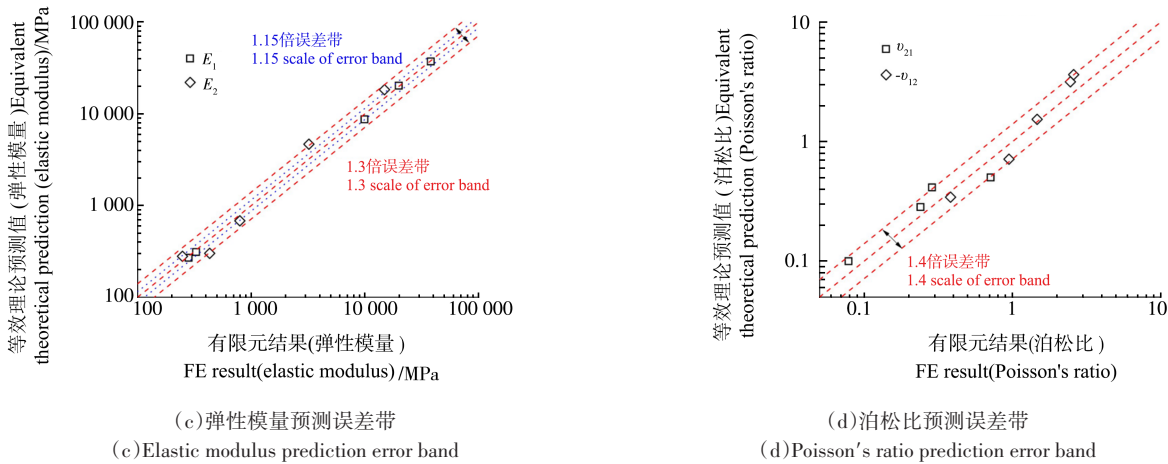


图6 弹性模量和泊松比预测结果与有限元模拟结果对比
Fig. 6 Comparison between prediction and finite element simulation results of elastic modulus and Poisson's ratio

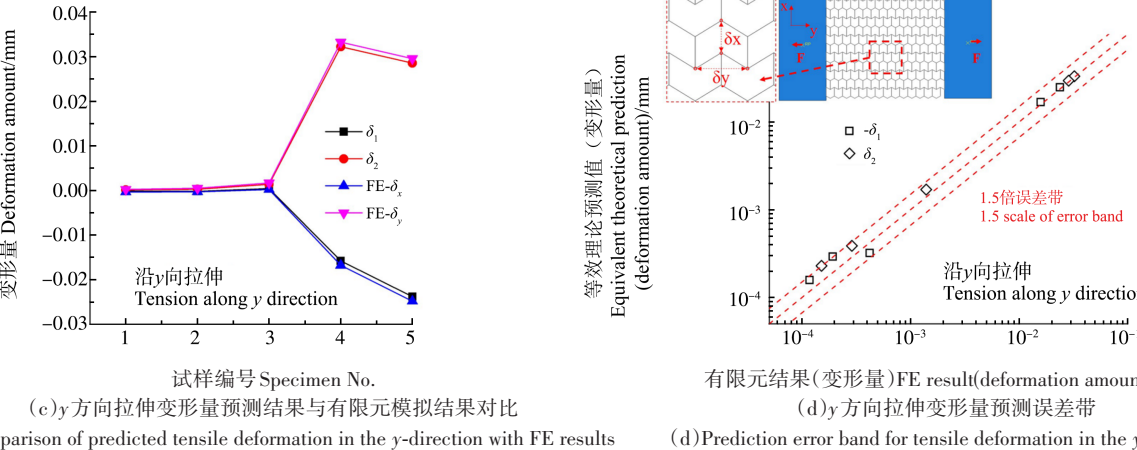
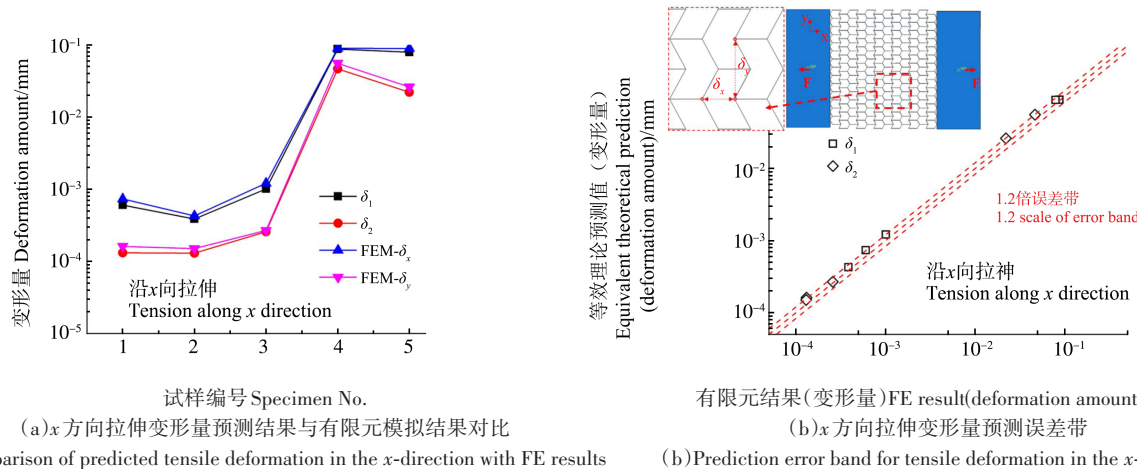


图7 变形量预测结果与有限元模拟结果对比
Fig. 7 Comparison between prediction of deformation amount and FE results

表3 不同等效理论预测模型采用的变形机制

Tab. 3 Deformation mechanisms applied in different equivalent theories

预测模型 Prediction model	变形机制 Deformation mechanism				
	弯曲变形 Bending deformation	拉伸变形 Tension deformation	铰链变形 Hinge deformation	剪切变形 Shear deformation	单元壁厚 Wall thickness of the cell
T ₁	√				
T ₂	√	√	√		
T ₃	√	√	√	√	√

以及单元壁厚的影响,这是本文建立的新型平面力学性能等效理论的预测模型。图8比较了不同等效理论预测的弹性模量和泊松比和有限元模拟结果。由图8可以发现,由预测模型3(T_3)预测的弹性模量(E_1 、 E_2)是最准确的,对于不同试样都有较好的预测效果, T_1 和 T_2 模型的 E_1 预测结果大于模拟结果, T_1 和 T_2 模型的 E_2 预测结果小于模拟结果,且 T_1 相较于 T_2 的误差更大。对

于 x 或 y 方向上的泊松比(ν_{12} 或 ν_{21}), T_3 模型对于不同试样的预测结果也更接近相应的有限元结果,而 T_1 和 T_2 模型的 E_1 预测结果的波动性较大。总之,以上研究进一步表明,本文建立的等效理论预测模型 T_3 ,由于考虑了更全面的变形机制(包括弯曲、拉伸、铰接和剪切变形以及单元壁厚),是预测半内凹蜂窝结构平面内弹性模量和泊松比的行之有效的等效理论方法。

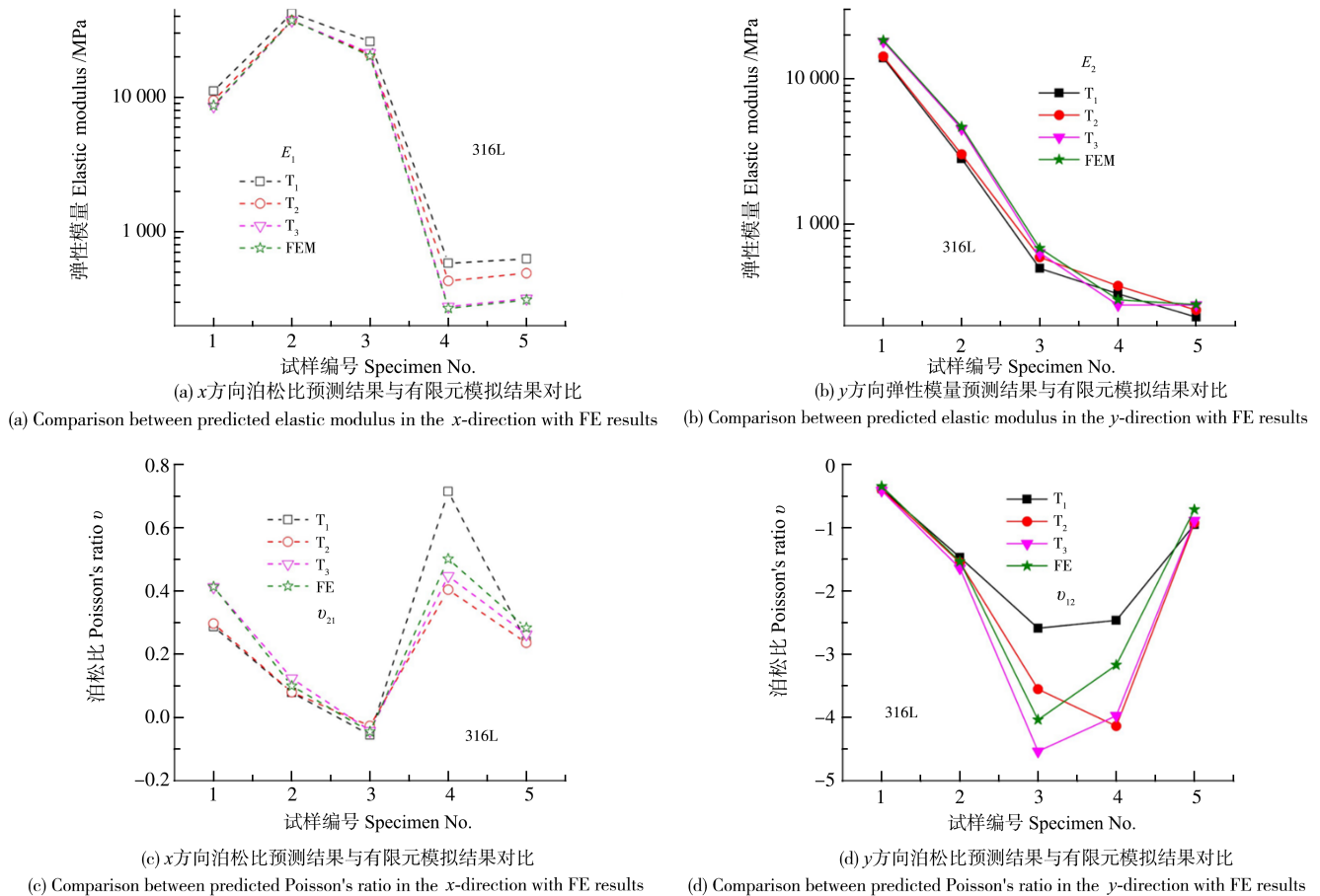


图8 不同预测模型的弹性模量、泊松比预测结果与模拟结果对比

Fig. 8 Comparison between prediction and simulation of elastic modulus and Poisson's ratio results using different predicting models

3 结论

针对半内凹蜂窝结构,利用理论方法和有限元仿真对其面内力学性能、变形特性和等效预测模型进行了研究。主要结论如下:

1) 通过耦合六边形蜂窝单元和内凹蜂窝单元的弯曲、拉伸、铰接和剪切变形等不同机制,并考虑单元壁厚的影响,建立半内凹蜂窝单元的面内变形力学性能等效理论,实现对其面内不同方向弹性模量和泊松比的预测。

2) 利用有限元方法分析几何参数(倾斜臂长 l 、垂直臂长 h 、角度 α 、角度 β 、结构厚度 d 和单元壁厚 t)对半内凹蜂窝结构的面内拉伸性能(弹性模量和泊松

比)的影响,并通过对比不同等效理论预测结果,验证了本文提出的等效理论模型的有效性和准确性。

参考文献(References)

- [1] LIU Y P, HU H. A review on auxetic structures and polymeric materials[J]. Scientific Research and Essays, 2010, 5(10): 1052-1063.
- [2] MASTERS I G, EVANS K E. Models for the elastic deformation of honeycombs[J]. Composite Structures, 1996, 35(4): 403-422.
- [3] LAKES R. Advances in negative Poisson's ratio materials [J]. Advanced Materials, 1993, 5: 293-296.
- [4] WANG Y L, YU Y Y, WANG C Y, et al. On the out-of-plane ballistic performances of hexagonal, reentrant, square, triangular and circular honeycomb panels[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 173: 105402.

- [5] CHEN Z Y, WU X, XIE Y M, et al. Re-entrant auxetic lattices with enhanced stiffness: a numerical study [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 178: 105619.
- [6] GRIMA J N, OLIVERI L, ATTARD D, et al. Hexagonal honeycombs with zero Poisson's ratios and enhanced stiffness [J]. *Advanced Engineering Materials*, 2010, 12(9): 855-862.
- [7] GRIMA J N. Paper presented at the 6th international workshop on auxetics & related systems [J]. Bolton (UK), 2009: 1-20.
- [8] DAVINI C, FAVATA A, MICHELETTI A, et al. A 2D microstructure with auxetic out-of-plane behavior and non-auxetic in-plane behavior [J]. *Smart Material Structures*, 2017, 26(12): 125007.
- [9] GIBSON L J, ASHBY M F, SCHAJER G S, et al. The mechanics of two-dimensional cellular materials [J]. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences*, 1982, 382(1782): 25-42.
- [10] EL-SAYED F K, JONES R, BURGESS I W. The behaviour of honeycomb cores for sandwich panels [J]. *Composites*, 1979: 10.
- [11] ASHBY M F, GIBSON L J. *Cellular solids: structure and properties* [M]. Cambridge University Press, 1997: 175-231.
- [12] WARREN W E, KRAYNIK A M. Foam mechanics: the linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials [J]. *Mechanics of Materials*, 1987, 6(1): 27-37.
- [13] GILLIS P P. Calculating the elastic constants of graphite [J]. *Carbon*, 1984, 22(4/5): 387-391.
- [14] NKANSAH M A, EVANS K E, HUTCHINSON I J. Modelling the mechanical properties of an auxetic molecular network [J]. *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1994, 2(3): 337-352.
- [15] ZHANG J J, LU G X, RUAN D, et al. Tensile behavior of an auxetic structure: analytical modeling and finite element analysis [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 136: 143-154.
- [16] WANG X T, WANG B W, LI X, et al. Mechanical properties of 3D re-entrant auxetic cellular structures [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 131: 396-407.
- [17] WAN H, OHTAKI H, KOTOSAKA S, et al. A study of negative Poisson's ratios in auxetic honeycombs based on a large deflection model [J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2004, 23(1): 95-106.
- [18] CHEN Q, PUGNO N M. In-plane elastic properties of hierarchical nano-honeycombs: the role of the surface effect [J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2013, 37: 248-255.
- [19] BARAN T, ÖZTÜRK M. In-plane elasticity of a strengthened re-entrant honeycomb cell [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2020, 83: 104037.
- [20] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. *Theory of elasticity* [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42: 911.
- [21] 富明慧, 徐欧腾, 陈 誉. 蜂窝芯层等效参数研究综述 [J]. *材料导报*, 2015, 29(5): 127-134.
- FU MingHui, XU OuTeng, CHEN Yu. An overview of equivalent parameters of honeycomb cores [J]. *Materials Review*, 2015, 29(5): 127-134 (In Chinese).
- [22] 孙德强, 张卫红. 双壁厚蜂窝铝芯的共面冲击力学性能 [J]. *振动与冲击*, 2008, 27(7): 69-74.
- SUN DeQiang, ZHANG WeiHong. In-plane impact properties of aluminum double-walled honeycomb cores [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(7): 69-74 (In Chinese).