

# 未知激励下基于改进强跟踪卡尔曼滤波的结构响应重构\*

## STRUCTURAL RESPONSE RECONSTRUCTION BASED ON IMPROVED STRONG TRACKING KALMAN FILTER WITH UNKNOWN EXCITATION

侯亚琨\*\* 彭珍瑞\*\*\*

(兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

HOU YaKun PENG ZhenRui

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**摘要** 提出一种基于改进强跟踪卡尔曼滤波的结构外部激励计算和响应重构的方法。首先,利用状态空间模型得出结构的外部激励,并将激励与模态坐标结合组成新的状态向量,构建增秩状态空间模型。然后,在传统强跟踪卡尔曼滤波算法的基础上进行改进,使其能够处理有色噪声。最后,利用结构部分测点的加速度响应,实现对结构外部激励的计算及其余未测点的速度、加速度响应的重构,分别通过二维桁架和外伸梁进行数值模拟和试验分析,用来验证所提方法的有效性。结果表明,该方法能够有效地重构结构外部激励、未测点的速度和加速度响应,其响应时程曲线与计算响应或测量响应时程曲线吻合良好。

**关键词** 结构响应重构 状态空间模型 激励计算 改进强跟踪卡尔曼滤波算法 有色噪声

**中图分类号** TH113.1

**Abstract** A method for the calculation of structural external excitation and the reconstruction of structural response based on improved strong tracking Kalman filter was proposed. Firstly, the external excitation of the structure was derived by using the state-space model, and the external excitation and structural modal coordinates were combined to form a new state vector and an augmented rank state-space model was constructed. Secondly, an improvement based on the traditional strong tracking Kalman filter algorithm was carried out, which can deal with colored noise. Finally, the acceleration responses of some measuring points in the structure were used to calculate the external excitation of the structure and reconstruct the velocity and acceleration responses of the unmeasured points, the numerical simulation and experimental analysis of the two-dimensional truss and extended beam were respectively carried out to verify the proposed method. The results show that the proposed method can effectively reconstruct the structural external excitations, the velocity and acceleration responses of the unmeasured points, and its response time-history curve is in good agreement with the calculated response time-history curve or the measured response time-history curve.

**Key words** Structural response reconstruction; State-space model; Excitation calculation; Improved strong tracking Kalman filter algorithm; Colored noise

Corresponding author: PENG ZhenRui, E-mail: pzrui@163.com

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No.62161018).

Manuscript received 20230504, in revised form 20230610.

## 0 引言

近年来,随着社会的高速发展,建造了大量的桥梁、隧道等大型土木工程,对这些结构进行实时健康监测变得尤为重要。然而,在实际工程中,传感器布置的位置和数量往往会受到各种条件的限制,结构上有很多位置并未安装传感器,这就会造成监测数据的

不完备。因此,利用有限数量的传感器测量得到的响应去重构未测量处响应的结构响应重构技术具有非常重要的研究意义<sup>[1-4]</sup>。

目前,结构响应重构的方法可以分为:能够建立精确有限元模型的响应重构确定性方法,通过构建已测量响应与待重构响应之间的关系,实现对未知响应的重构。KAMMER D C<sup>[5]</sup>提出基于模态分析的响应重

\*20230504收到初稿,20230610收到修改稿。国家自然科学基金项目(62161018)资助。

\*\*侯亚琨,男,1998年生,甘肃两当人,汉族,兰州交通大学硕士研究生,主要研究方向为动力响应重构。

\*\*\*彭珍瑞,男,1972年生,甘肃民勤人,汉族,兰州交通大学教授,博士研究生导师,主要研究方向为结构动力学与模态分析。

构方法,利用可测量的响应数据和结构模态振型矩阵来重构不可测位置处的动态响应。LAW S S等<sup>[6]</sup>将加速度传递率法用于子结构的响应重构中,并在响应求解过程中结合一阶保持输入逼近,从而提高了动态响应的准确性。HE J J等<sup>[7]</sup>提出了基于经验模态分解的响应重构方法。WANG J等<sup>[8]</sup>将 Markov 参数计算参数矩阵的方法应用于响应重构当中。但是,建立精确的有限元模型对于复杂的大型结构来说是很困难的,如果有限元模型的精度得不到保证,则必定会影响重构精度。因此便提出了针对难以建立精准有限元模型的响应重构不确定性方法,在存在模型误差和测量误差情况下进行结构响应重构。张笑华等<sup>[9]</sup>采用卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)算法重构了二维桁架的应变和位移响应,同时并优化了位移和应变两种传感器的位置和数量。徐友林等<sup>[10]</sup>使用KF算法对大跨度悬索桥进行多类型响应重构和传感器优化布置。HU R P等<sup>[11]</sup>采用KF算法对一高层建筑的各类响应进行重构,并将重构后的数据用于地震前后结构性能评估和安全预警。

然而,在实际工程中结构的外部激励信息通常是很难获取的。因此,综合考虑实际情况,在外部激励未知的情况下计算外部激励和重构各处响应具有重要的研究意义。LI J等<sup>[12]</sup>基于状态空间模型推导了外部激励与结构响应的传递矩阵,用于重构外部激励和结构响应。董康立等<sup>[13]</sup>基于类卡尔曼滤波算法实现了对结构外部激励和响应进行重构。张超东等<sup>[14]</sup>使用增秩卡尔曼滤波算法进行载荷识别和结构响应重构。张肖雄等<sup>[15]</sup>143-149提出了一种基于KF算法的非线性结构响应重构和荷载识别方法。

除此之外,使用卡尔曼滤波类算法必须事先假设测量噪声为高斯白噪声,而实际工程中的噪声却多为有色噪声,若把有色噪声当作白噪声处理,必然影响响应重构精度<sup>[16]</sup>。近年来,很多不同领域的学者对卡尔曼滤波类算法进行改进<sup>[17-19]</sup>,使其能够用于处理有色噪声,皆取得了较好的效果。

因此,针对以上问题,提出了一种基于改进强跟踪卡尔曼滤波(Improved Strong Tracking Kalman Filter, ISTKF)的结构响应重构和外部激励计算的方法。首先,利用状态空间模型得出结构的外部激励,并将激励与模态坐标结合组成新的状态向量,构建增秩状态空间模型。然后在标准强跟踪卡尔曼滤波(Strong Tracking Kalman Filter, STKF)残差序列正交的基础上计算比例因子,使其能够处理测量数据中包含的有色噪声。最后利用有限数目加速度传感器得到的测量数据,完成对结构未测点的速度和加速度响应的重构和外部激励的计算。并且通过分别选用二维桁架和

外伸梁进行数值模拟和试验分析,用以验证所提方法的有效性和可行性。

## 1 基本理论

### 1.1 2阶运动方程的状态空间模型

结构的2阶运动方程用模态坐标可表示为

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2q = \Phi^T Lu \quad (1)$$

式中, $q$ 为模态坐标; $\xi$ 为阻尼矩阵; $\omega_0$ 为模态频率矩阵; $u$ 为外部激励向量; $L$ 为激励映射矩阵; $\Phi$ 为模态位移振型矩阵。

式(1)转换为状态空间方程并离散化,有

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{x}_k$ 、 $\mathbf{y}_k$ 和 $\mathbf{u}_k$ 分别为离散后的状态向量、观测向量和外部激励向量; $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 分别为离散化后的状态矩阵和输入矩阵; $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 分别为输出矩阵和直接传输矩阵。若观测量为结构各节点的加速度,则式(2)中的各项具体表示为

$$\mathbf{x}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_k \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = e^{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \Delta t} \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T L \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = [-\Phi\omega_0^2 \quad -2\Phi\xi\omega_0] \quad (6)$$

$$\mathbf{D} = [\Phi\Phi^T L] \quad (7)$$

### 1.2 基于状态空间模型的激励计算

由状态空间模型可计算出各时刻的结构的外部激励向量 $\mathbf{u}_k$ ,具体计算过程如下:

由式(2)得

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \quad (8)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}] + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (9)$$

根据式(9),通过最小二乘原理<sup>[15]</sup>143-149,可获得外部激励的计算式为

$$\mathbf{u}_k = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T [\mathbf{y}_k - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1})] \quad (10)$$

由于在实际工程中噪声是普遍存在的,直接用式(10)计算得出的结果必然会受到噪声的干扰,导致与实际值存在一定的差距。因此,将结构状态向量与外部激励向量组成增秩状态向量,并进行滤波处理,以减小噪声产生的影响。

### 1.3 增秩状态空间模型

外部激励向量在 $k$ 时刻至 $k+1$ 时刻的增量可表示为

$$\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k \quad (11)$$

将结构的状态向量 $\mathbf{x}_k$ 与外部激励向量 $\mathbf{u}_k$ 联合构成增秩状态向量 $\mathbf{X}_k = [\mathbf{x}_k \mathbf{u}_k]^T$ 。增秩状态空间模型可

表示为

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_a X_k + B_b \Delta u_k + w_k \\ Y_k = C_c X_k + v_k \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $w_k$ 、 $v_k$  分别为系统噪声和测量噪声, 其方差矩阵分别为  $Q_k$  和  $R_k$ 。其余各项具体表示为

$$A_a = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & \Phi & 0 \\ -\Phi \omega_0^2 & -2\Phi \xi \omega_0 & \Phi \Phi^T L \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (15)$$

借助增秩状态空间模型, 结合传感器部分测量信息, 通过滤波处理后得到的状态向量为  $X_k^r$ , 则结构各处的响应和外部激励为

$$Y_k^e = C_c^e X_k^r \quad (16)$$

式中,  $C_c^e$  为结构对应位置输出矩阵, 是矩阵  $C_c$  的子矩阵;  $Y_k^e$  中包含所需重构点的速度、加速度和外部激励。

#### 1.4 卡尔曼滤波算法

卡尔曼滤波算法实质是一种概率论与数理统计学中的贝叶斯方法, 依据最小方差无偏估计准则对系统状态变量做出最优估计。卡尔曼滤波算法一般包括预测(先验)和更新(后验)两个部分, 具体可表示如下:

预测步为

$$\begin{cases} x_{k|k-1} = A x_{k-1|k-1} + B u_{k-1} \\ y_{k|k-1} = C x_{k|k-1} + D u_k \\ P_{k|k-1} = A P_{k-1|k-1} A^T + Q_k \end{cases} \quad (17)$$

更新步为

$$\begin{cases} K_k = P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R_k)^{-1} \\ x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k (y_k - y_{k|k-1}) \\ P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k C P_{k|k-1} \end{cases} \quad (18)$$

式中,  $x_{k|k-1}$  为先验状态估计向量;  $P_{k|k-1}$  为先验估计误差协方差矩阵;  $K_k$  为卡尔曼增益矩阵;  $x_{k|k}$  为后验状态估计向量;  $P_{k|k}$  为后验估计误差方差矩阵;  $y_{k|k-1}$  为测量估计值。

#### 1.5 强跟踪卡尔曼滤波算法

传统卡尔曼滤波算法的迭代更新过程中受历史数据的影响较大, 并且由于系统模型存在不确定因素, 估计值可能会偏离系统的真实值, 最后会通过残差序列表现出来。传统强跟踪卡尔曼滤波算法引入渐消因子对先验估计误差协方差矩阵  $P_{k|k-1}$  和增益矩阵  $K_k$  进行实时调整, 降低历史数据的影响, 克服模型的不确定因素, 从而保证重构的精度<sup>[20]</sup>。

首先定义残差为

$$\gamma_k = y_k - (C x_{k|k-1} + D u_k) \quad (19)$$

引入渐消因子  $\lambda_k$  调整  $P_{k|k-1}$ , 则有

$$P_{k|k-1} = \lambda_k A P_{k-1|k-1} A^T + Q_k \quad (20)$$

$$\lambda_k = \begin{cases} 1, & \lambda_0 \leq 1 \\ \lambda_0, & \lambda_0 > 1 \end{cases} \quad (21)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\text{trace}(N_k)}{\text{trace}(M_k)}} \quad (22)$$

$$\begin{cases} N_k = V_k - C Q_{k-1} C^T - \beta R_k \\ M_k = C A P_{k-1|k-1} A^T C^T \end{cases} \quad (23)$$

$$V_k = \begin{cases} \gamma_1 \gamma_1^T, & k = 1 \\ \frac{\rho V_{k-1} + \gamma_k \gamma_k^T}{1 + \rho}, & k \geq 2 \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $V$  为残差序列的协方差阵;  $\rho$  为遗忘因子,  $0 \leq \rho \leq 1$ ;  $\beta$  为弱化因子,  $\beta \geq 1$ 。

#### 1.6 适用处理有色噪声的强跟踪卡尔曼滤波算法

传统强跟踪卡尔曼滤波类算法仍然必须事先假设测量噪声为高斯白噪声, 而实际工程中的噪声却多为有色噪声, 若把有色噪声当作白噪声处理, 必然影响响应重构精度。针对以上问题, 对于通过式(24)得到的残差序列的协方差阵  $V_k$ , 为了使得残差序列仍然正交, 引入比例因子  $\alpha_k$  来调整  $R_k$ , 以此来增强状态预测在滤波估计中的作用<sup>[21]</sup>。综上所述, 增秩状态空间模型下适用于处理有色噪声的强跟踪卡尔曼滤波算法的具体步骤如图 1 所示。

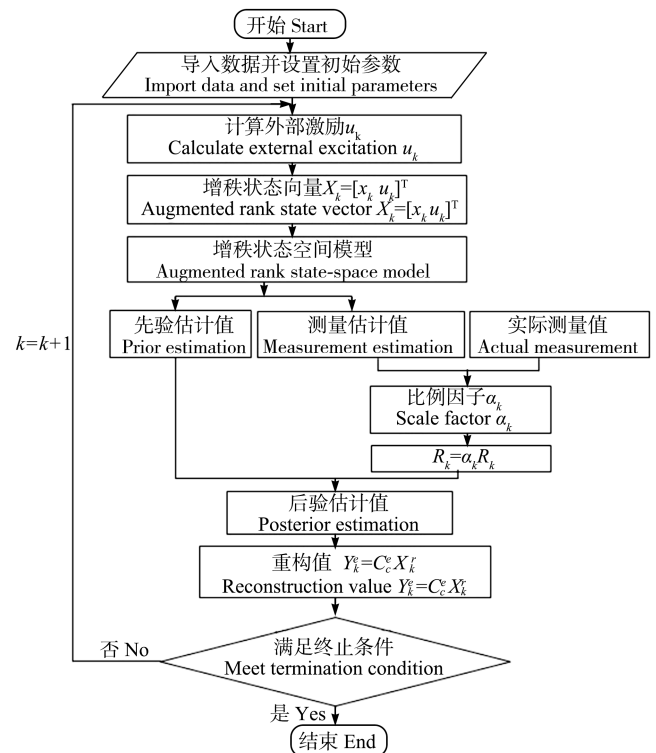


图 1 基于改进 STKF 的响应重构流程

Fig. 1 Flow chart of response reconstruction based on improved STKF

预测步为

$$\begin{cases} X_{klk-1} = A_a X_{k-1lk-1} + B_b \Delta u_{k-1} \\ Y_{klk-1} = C_c X_{klk-1} \\ P_{klk-1} = A_a P_{k-1lk-1} A_a^T + Q_k \end{cases} \quad (25)$$

求比例因子  $\alpha_k$ , 有

$$\begin{cases} \gamma_k = Y_k - C_c X_{klk-1} \\ V_k = \begin{cases} \gamma_1 \gamma_1^T, k=1 \\ \frac{\rho V_{k-1} + \gamma_k \gamma_k^T}{1+\rho}, k \geq 2 \end{cases} \\ \alpha_k = \max[1, \text{trace}(V_k - C_c P_{klk-1} C_c^T) / \text{trace}(R_k)] \\ R_k = \alpha_k R_k \end{cases} \quad (26)$$

更新步为

$$\begin{cases} K_k = P_{klk-1} C_c^T (C_c P_{klk-1} C_c^T + R_k)^{-1} \\ X_{klk} = X_{klk-1} + K_k (Y_k - Y_{klk-1}) \\ P_{klk} = P_{klk-1} - K_k C_c P_{klk-1} \end{cases} \quad (27)$$

## 2 数值算例

选取二维桁架作为数值模拟对象,用来验证本文所提方法的有效性。如图2所示,该桁架结构共有14个节点、25个单元和25个自由度,选取前6阶模态作为目标模态进行响应重构。弹性模量、密度和泊松比分别为210 GPa、7 850 kg/m<sup>3</sup>和0.3。在第4节点Y方向施加锤击激励,选取2、14节点Y方向的速度和加速度响应作为测量响应。在实际环境中,测量噪声为白噪声情况的很少见,很多情况下测量噪声是有色噪声。因此,在测量噪声为有色噪声的条件下进行激励识别和响应重构是更为接近实际情况的,故加入3%的有色噪声用以模拟传感器正常工作时的实际测量响应。有色噪声功率谱如图3所示。

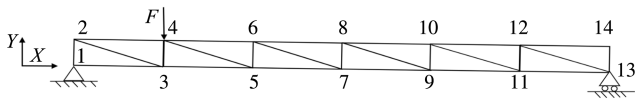


图2 二维桁架结构

Fig. 2 Two-dimensional truss structure

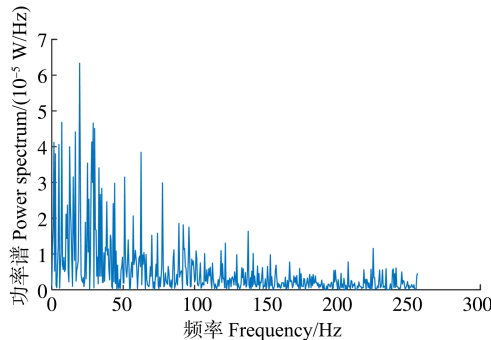
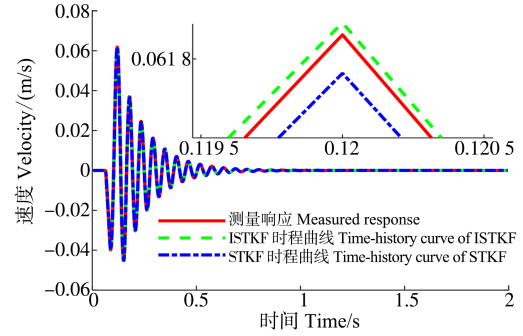


图3 有色噪声功率谱

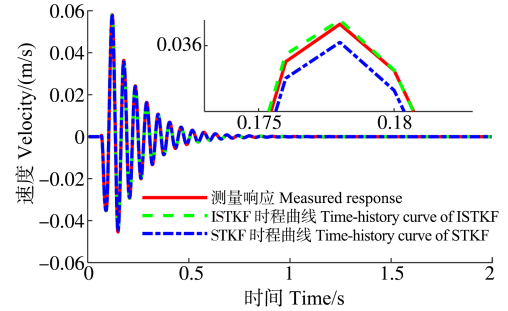
Fig. 3 Power spectrum of the colored noise

假设6、10节点Y方向的速度传感器和加速度传感器失效,通过现有的2、14节点Y方向的加速度传感器得到的响应,对传感器失效和缺失处的响应和其他各点处的响应进行重构,并计算外部激励。重构结果如图4所示。



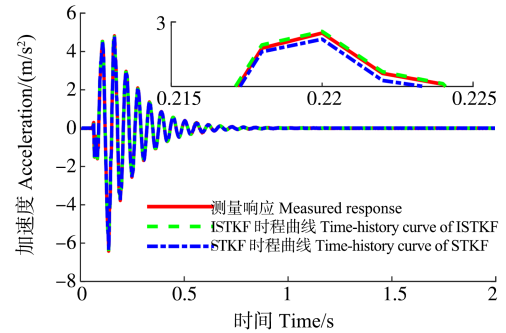
(a) 6节点Y向速度

(a) Velocity of Y direction at node 6



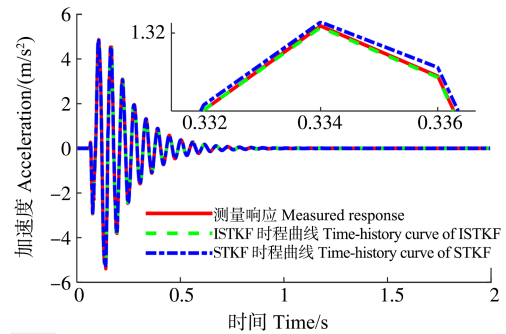
(b) 10节点Y向速度

(b) Velocity of Y direction at node 10



(c) 6节点Y向加速度

(c) Acceleration of Y direction at node 6



(d) 10节点Y向加速度

(d) Acceleration of Y direction at node 10

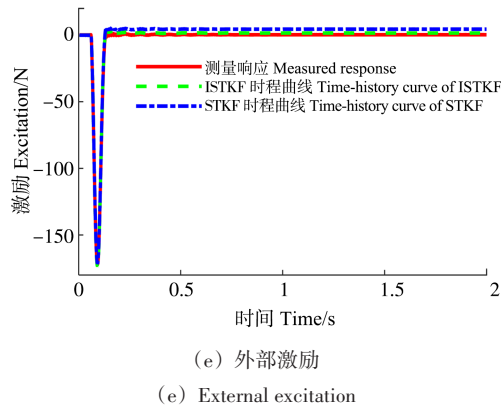


图 4 重构信息与测量信息对比

Fig. 4 Comparison of reconstructed and measured responses

由图 4 可以看出,ISTKF 算法重构出的响应曲线相较于 STKF 算法能够更好地拟合测量响应曲线,即能够更好地对传感器信息失效和缺失处的响应进行有效重构,并能够计算出结构的外部激励。

为了衡量重构出的响应的精度,同时在相同条件下与 STKF 进行对比,引入相对百分比误差(Relative Percentage Error, RPE)来衡量重构精度,具体计算式表示为

$$R_{\text{RPE}} = \frac{\text{std}(Y^e - Y^r)}{\text{std}(Y^r)} \times 100\% \quad (28)$$

式中, $Y^e$ 为式(16)得出的重构响应; $Y^r$ 为实际测量响应;std表示标准差。

由图 5 可知,使用 ISTKF 算法所得的 6、10 节点  $Y$  方向的速度、加速度和外部激励的  $R_{\text{RPE}}$  分别为 0.69%、0.94%、0.72%、0.95% 和 1.71%,相较于 STKF 算法,其 RPE 值更小,从而证明 ISTKF 算法对响应重构问题的有效性。

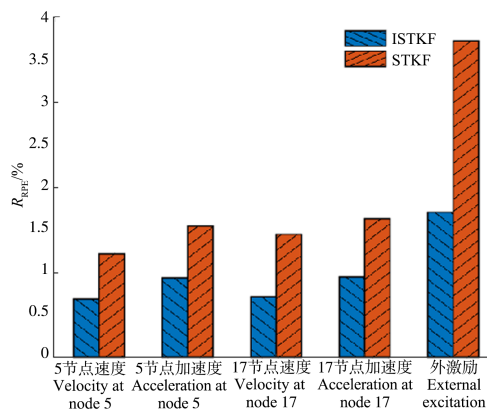


图 5 数值算例的相对误差百分比

Fig. 5 Relative percentage error of numerical examples

为了探究本文所提方法在不同噪声等级下和测点位置发生改变时,重构精度是否会发生较大变化,分别设计两组不同的测点组合方案,并且在测量响应

中加入 6% 和 9% 的有色噪声作为实际测量响应,用以验证重构效果。

方案 I:选取 2 节点和 14 节点处  $Y$  向加速度响应为测量响应。

方案 II:选取 3 节点和 12 节点处  $Y$  向加速度响应为测量响应。

两种方案在不同噪声等级下的 RPE 值如表 1 所示。由表 1 可以看出,随着噪声等级的增强,重构出的各点的响应和外部激励的精度在不断降低,但重构出的响应在不同噪声等级的影响下,相对百分比误差均未发生较大波动。综上分析,本文所提方法能够在不同噪声水平下对结构各点未知响应进行有效重构。

表 1 锤击激励下的相对误差百分比

| Tab. 1 Relative percentage error under hammer excitation % |                              |                                   |                                |                                     |                             |
|------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 噪声水平<br>Noise level                                        | 6 节点速度<br>Velocity at node 6 | 6 节点加速度<br>Acceleration at node 6 | 10 节点速度<br>Velocity at node 10 | 10 节点加速度<br>Acceleration at node 10 | 外部激励<br>External excitation |
| 方案 I                                                       | 3                            | 0.69                              | 0.94                           | 0.72                                | 0.95                        |
|                                                            | 6                            | 2.93                              | 3.41                           | 3.04                                | 3.52                        |
|                                                            | 9                            | 5.28                              | 5.80                           | 5.47                                | 6.06                        |
| 方案 II                                                      | 3                            | 1.10                              | 1.54                           | 1.16                                | 1.63                        |
|                                                            | 6                            | 1.91                              | 2.60                           | 1.88                                | 2.39                        |
|                                                            | 9                            | 3.43                              | 3.94                           | 3.25                                | 3.90                        |

为了探究在不同形式的外部激励下此方法的稳定性,在第 4 节点  $Y$  方向施加由式(29)所示的正弦激励,仍旧采用上文提到的两组不同的测点组合方案,在不同噪声等级下的 RPE 值如表 2 所示。

$$u = 20\sin(10\pi t) + 50\sin(15\pi t) + 20\sin(30\pi t) \quad (29)$$

表 2 正弦激励下的相对误差百分比

| Tab. 2 Relative percentage error under sinusoidal excitation % |                              |                                   |                                |                                     |                             |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 噪声水平<br>Noise level                                            | 6 节点速度<br>Velocity at node 6 | 6 节点加速度<br>Acceleration at node 6 | 10 节点速度<br>Velocity at node 10 | 10 节点加速度<br>Acceleration at node 10 | 外部激励<br>External excitation |
| 方案 I                                                           | 3                            | 4.28                              | 7.18                           | 4.74                                | 7.51                        |
|                                                                | 6                            | 4.29                              | 7.32                           | 4.94                                | 7.82                        |
|                                                                | 9                            | 5.81                              | 8.67                           | 6.37                                | 9.39                        |
| 方案 II                                                          | 3                            | 1.84                              | 5.13                           | 1.61                                | 4.41                        |
|                                                                | 6                            | 2.58                              | 5.90                           | 2.52                                | 5.49                        |
|                                                                | 9                            | 4.02                              | 7.52                           | 4.26                                | 7.56                        |

由表 2 可以看出,随着噪声等级的增强,重构出的各点的响应和外部激励的精度并未发生较大变化。综上分析,本文在噪声等级和激励改变的情况下,仍然能够有效重构未测点响应和识别外部激励。

### 3 试验验证

为了进一步验证本文所提方法的有效性和可行性,采用外伸梁进行试验验证,如图6所示。外伸梁的尺寸为2 000 mm×100 mm×10 mm,将其划分为20个单元、21个节点,并在节点2和20施加约束,左端铰支,右端可移动,约束方式如图7所示。选取前4阶模态作为目标模态进行响应重构。如图8所示,在节点9的Y向施加锤击激励,在节点8、11和14各布置1个加速度传感器采集加速度响应,用来重构结构未知响应,同时在节点5和17各布置1个加速度传感器与重构值作对比。试验所采用的加速度传感器型号为INV9821;网络分布式采集仪为北京东方振动和噪声技术研究所的INV3062-C2。由于试验数据为传感器实测所得,其中已包含测量噪声,所以不必像数值算例中那样添加有色噪声用以模拟实际测量响应。



图6 外伸梁试验

Fig. 6 Extended beam test

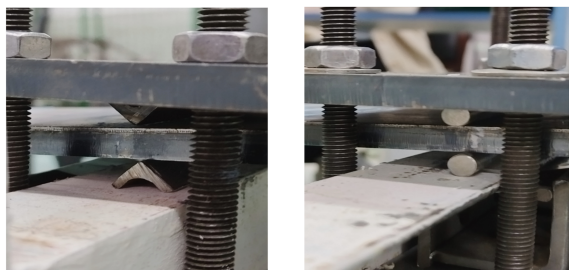
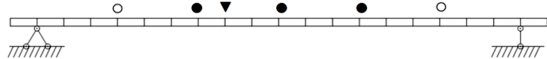


图7 边界约束条件

Fig. 7 Boundary constraint condition



▼:外部激励位置 External excitation position  
○:响应重构位置 Response reconstruction position  
●:响应测量位置 Measured response position

图8 测点布置图

Fig. 8 Layout of measuring points

如图9所示,第5节点Y向重构的速度和加速度RPE值分别为19.43%、13.42%;第17节点Y向重构的速度和加速度RPE值分别为23.88%、11.51%;外部激励重构的RPE值为28.14%。与STKF算法相比较,RPE值均有了明显的减小。所有的数据均为传感器实测所得,导致存在测量噪声等不确定因素,从而使得试验中得到的RPE值相较于数值算例中的RPE值必然有所增加。

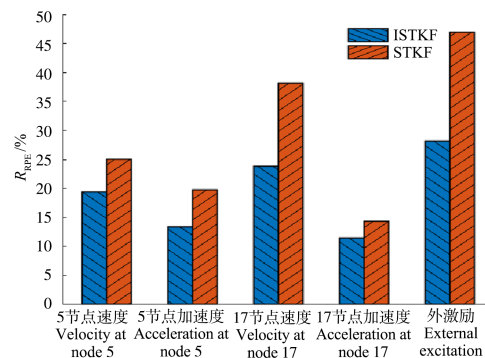
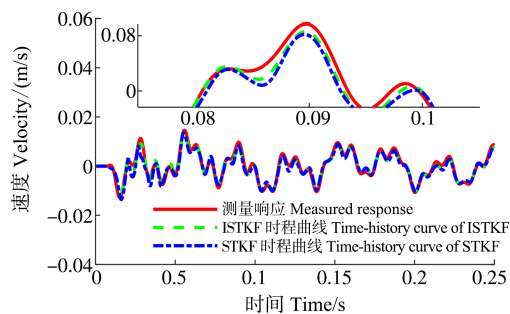


图9 外伸梁试验的相对误差百分比

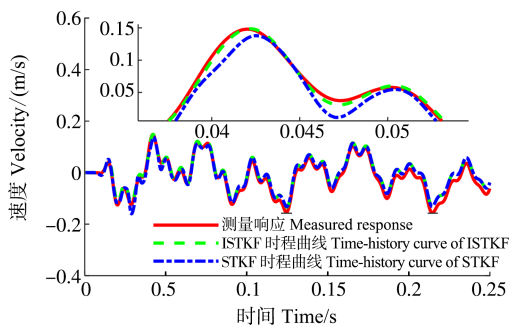
Fig. 9 Relative percentage error of extended beam test

图10为重构出的响应时程曲线和测量时程曲线的对比图。由图10可以看出,相较于STKF算法,本文所提改进算法的重构响应和传感器实际测量响应的吻合效果更好。



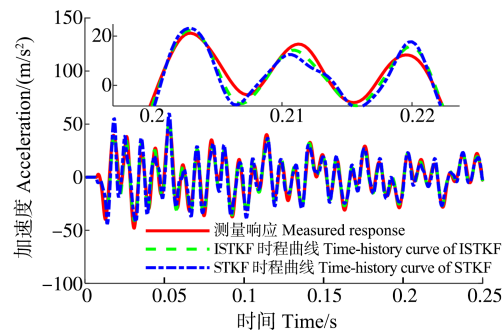
(a) 5节点Y向速度

(a) Velocity of Y direction at node 5



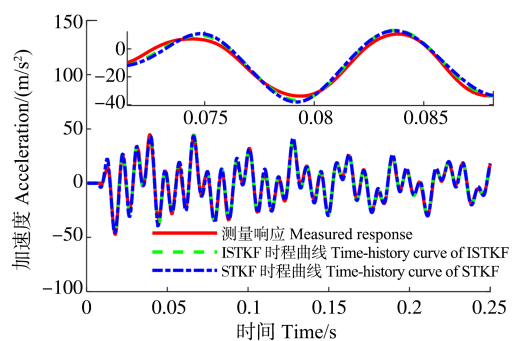
(b) 17节点Y向速度

(b) Velocity of Y direction at node 17



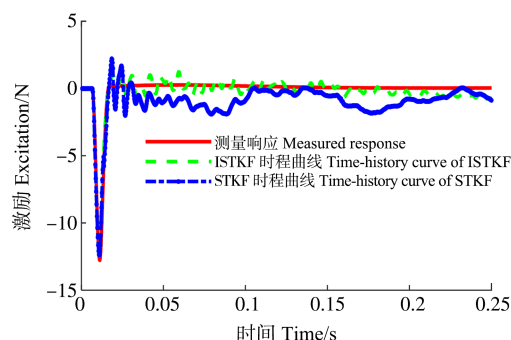
(c) 5节点Y向加速度

(c) Acceleration of Y direction at node 5



(d) 17节点Y向加速度

(d) Acceleration of Y direction at node 17



(e) 外部激励

(e) External excitation

图10 重构信息与测量信息对比

Fig. 10 Comparison of reconstructed and measured responses

综上所述,试验验证了本文所提方法在已知少量加速度响应的情况下,能够计算结构外部激励和重构结构未测位置的速度和加速度响应,并且重构效果良好。

## 4 结论

本文针对未知激励下测量噪声为有色噪声的情况,提出增秩状态空间模型下使用改进强跟踪卡尔曼滤波算法重构结构未测点响应和计算外部激励,并采用二维桁架的数值算例和外伸梁试验验证了该方法的有效性,得到的结论如下:

1) 基于状态空间模型运用最小二乘原理得到外部激励向量,并和结构的状态向量联合构成增秩状态向量,通过增秩状态空间模型经滤波处理可得到实际外部激励。

2) 通过STKF算法中的比例因子来增强状态预测在滤波估计中的作用,使其既能够应用于测量噪声为有色噪声的情况,又能够突出新数据在滤波中的作用,降低历史数据不断积累产生的影响。

3) 数值算例表明,本文所提方法在已知有限个加

速度响应的前提下,能够重构结构其余位置的响应和计算外部激励。并且随着噪声等级、传感器测点位置和外部激励方式的改变,重构出的响应和计算出的外部激励的精度并未发生较大的变化,从而说明该算法具有一定的鲁棒性。

4) 外伸梁的试验表明,本文所提方法能够基于传感器的有限测量信息重构结构未测点响应和计算外部激励,且重构效果良好。

## 参考文献(References)

- [1] SEVENTEKIDIS P, GIAGOPOULOS D, ARAILOPOULOS A, et al. Structural health monitoring using deep learning with optimal finite element model generated data [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 145: 106972.
- [2] 翁 顺, 朱宏平. 基于有限元模型修正的土木结构损伤识别方法[J]. 工程力学, 2021, 38(3): 1-16.  
WENG Shun, ZHU HongPing. Damage identification of civil structures based on finite element model updating [J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(3): 1-16 (In Chinese).
- [3] 杨 辰. 结构健康监测的传感器优化布置研究进展与展望[J]. 振动与冲击, 2020, 39(17): 82-93.  
YANG Chen. Advances and prospects for optimal sensor placement of structural health monitoring [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(17): 82-93 (In Chinese).
- [4] SUN L M, LI Y X, ZHU W, et al. Structural response reconstruction in physical coordinate from deficient measurements [J]. Engineering Structures, 2020, 212: 110484.
- [5] KAMMER D C. Estimation of structural response using remote sensor locations [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1997, 20(3): 501-508.
- [6] LAW S S, LI J, DING Y. Structural response reconstruction with transmissibility concept in frequency domain [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25(3): 952-968.
- [7] HE J J, GUAN X F, LIU Y M. Structural response reconstruction based on empirical mode decomposition in time domain [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 28(2): 348-366.
- [8] WANG J, LAW S S, YANG Q S. Sensor placement method for dynamic response reconstruction [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(9): 2469-2482.
- [9] 张笑华, 任伟新, 方圣恩. 两种传感器的位置优化及结构多种响应重构[J]. 振动与冲击, 2014, 33(18): 26-30.  
ZHANG XiaoHua, REN WeiXin, FANG ShengEn. Position optimization and structural multi response reconstruction of two sensors [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(18): 26-30 (In Chinese).
- [10] 徐友林, 张晓华, 朱松叶, 等. 大跨悬索桥结构健康监测的多类型传感器放置与响应重构[J]. 科学通报, 2016, 61(4): 313-329.  
XU YouLin, ZHANG XiaoHua, ZHU SongYe, et al. Multi type sensor placement and response reconfiguration for structural health

- monitoring of longspan suspension bridges[J]. Chinese Science Bulletin, 2016, 61(4): 313-329(In Chinese).
- [11] HU R P, XU Y L. SHM-based seismic performance assessment of high-rise buildings under long-period ground motion[J]. Journal of Structural Engineering, 2019, 145(6): 04019038.
- [12] LIU J, LI B. A novel strategy for response and force reconstruction under impact excitation[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(8): 3581-3596.
- [13] 董康立, 殷红, 彭珍瑞. 面向多类型传感器优化布置的结构响应重构[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1339-1346.  
DONG KangLi, YIN Hong, PENG ZhenRui. Structural response reconstruction oriented to optimal multi-type sensor placement[J]. Control Theory and Applications, 2018, 35(9): 1339-1346 (In Chinese).
- [14] 张超东, 黎剑安. 基于增秩 Kalman 滤波的动态荷载识别和结构响应重构[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(7): 665-674.  
ZHANG ChaoDong, LI JianAn. Dynamic load identification and structural response reconstruction based on the augmented Kalman filter[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(7): 665-674(In Chinese).
- [15] 张肖雄, 贺佳, 齐梦晨. 基于 KF 的非线性结构响应重构和外激励识别研究[J]. 建筑结构学报, 2020, 41(11): 143-149.  
ZHANG XiaoXiong, HE Jia, QI MengChen. Study on KF-based responses reconstruction of nonlinear structure and external excitation identification[J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(11): 143-149(In Chinese).
- [16] 史鹏程, 彭珍瑞, 董康立. 基于有限测量信息的两步响应重构方法[J]. 振动与冲击, 2022, 41(11): 291-297.  
SHI PengCheng, PENG ZhenRui, DONG KangLi. Two-step response reconstruction method based on limited measured information[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(11): 291-297(In Chinese).
- [17] 熊雪, 郭敏华, 李伟杰, 等. 基于有色噪声的改进卡尔曼滤波方法[J]. 中国惯性技术学报, 2017, 25(1): 33-36.  
XIONG Xue, GUO MinHua, LI WeiJie, et al. Improved Kalman filtering method for MIMU with colored noises[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2017, 25(1): 33-36(In Chinese).
- [18] 林旭, 刘俊钊. 有色噪声下的目标跟踪卡尔曼滤波新算法[J]. 中国惯性技术学报, 2018, 26(6): 830-834.  
LIN Xu, LIU JunZhao. New Kalman filtering algorithm for target tracking with colored noise[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 26(6): 830-834 (In Chinese).
- [19] 许强, 崔洪亮, 丁邦平, 等. 考虑有色噪声影响的脉冲星导航 2 级强跟踪差分滤波器[J]. 航空学报, 2023, 44(3): 257-269.  
XU Qiang, CUI HongLiang, DING BangPing, et al. Two-stage strong tracking differential Kalman filter for X-ray pulsar navigation with coloured noise[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(3): 257-269 (In Chinese).
- [20] 刘铁材, 范志先, 王翔宇, 等. 基于弯道自适应强跟踪卡尔曼滤波的侧向坡度估计算法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2021, 49(增刊 1): 148-154.  
LIU YiCai, FAN ZhiXian, WANG XiangYu, et al. Road bank estimation based on curve adaptive strong tracking Kalman filter[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2021, 49(Suppl. 1): 148-154 (In Chinese).
- [21] 吕东辉, 王炯琦, 熊凯, 等. 适用处理非高斯观测噪声的强跟踪卡尔曼滤波器[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(12): 1997-2004.  
LU DongHui, WANG JiongQi, XIONG Kai, et al. Strong tracking Kalman filter for non-Gaussian observation[J]. Control Theory and Applications, 2019, 36(12): 1997-2004 (In Chinese).