

# 三参数威布尔分布的参数估计及置信限计算方法\*

## PARAMETER ESTIMATION AND CONFIDENCE LIMIT CALCULATION METHOD OF THREE-PARAMETER WEIBULL DISTRIBUTION

张剑锋\*\*<sup>1</sup> 徐芳<sup>1</sup> 张燕<sup>2</sup> 黄小波<sup>1</sup> 贾卓翰<sup>1</sup>

(1. 中国航发商用航空发动机有限责任公司 材料工程部, 上海 201108)

(2. 中国航发商用航空发动机有限责任公司 制造工程部, 上海 201108)

ZHANG JianFeng<sup>1</sup> XU Fang<sup>1</sup> ZHANG Yan<sup>2</sup> HUANG XiaoBo<sup>1</sup> JIA ZhuoHan<sup>1</sup>

(1. Department of Material Engineering, AECC Commercial Aircraft Engine Co., Ltd., Shanghai 201108, China)

(2. Department of Manufacturing Engineering, AECC Commercial Aircraft Engine Co., Ltd., Shanghai 201108, China)

**摘要** 针对三参数威布尔分布参数估计及置信限计算精度较低问题,提出了相关-回归法的参数估计及置信限计算方法。所提方法充分利用了相关系数法(简称“傅氏法”)对三参数威布尔分布参数估计的便捷性,以及非线性回归法的优良估计效果,将傅氏法和非线性回归法二者优势相结合。为验证其有效性,将相关-回归法应用于某合金强度值数据三参数威布尔分布的参数估计及置信限计算,并将不同样本量情况下的计算结果与傅氏法、极大似然估计与经验公式相结合的方法(简称“MMPDS法”)进行比较。结果表明,相关-回归法具有较高的参数估计和置信限计算精度,当样本量小于100时优势更为显著,能够准确计算威布尔分布的参数及置信限。

**关键词** 威布尔分布 参数估计 置信限

**中图分类号** V438<sup>+.4</sup>

**Abstract** A correlation-regression method was proposed to solve the problem of low accuracy of parameter estimation and confidence limit calculation of the three-parameter Weibull distribution. The method was combined by the correlation coefficient method (Fu method) and the nonlinear regression method which makes full use of the convenience of Fu method and the excellent estimation effect of the nonlinear regression method in estimating the three-parameter Weibull distribution. In order to verify the effectiveness of the proposed method, the correlation-regression method, Fu method and the method combining maximum likelihood estimation and empirical formulae (referred to as the “MMPDS method”) were applied to the parameter estimation and confidence limit calculation of the data distribution of a certain alloy strength value with different sample sizes, and calculation consequence of different methods was compared and analyzed. Results show that the correlation-regression method has higher parameter estimation and confidence limit calculation accuracy among the above methods. When the sample size is less than 100, its advantage is more significant, and it can accurately calculate the parameters and confidence limits of the Weibull distribution.

**Key words** Weibull distribution; Parameter estimation; Confidence limit

*Corresponding author: ZHANG JianFeng, E-mail: jianfengzh@126.com, Tel: +86-21-33367074*

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 52105163), and the Phosphorus Project of Shanghai Science and Technology (No. 22QB1406400).

Manuscript received 20221208, in revised form 20230112.

## 0 引言

可靠性的高低直接决定了产品的安全性和经济性水平<sup>[1]</sup>。面对日益激烈的民航航空市场竞争,航空设计制造企业越来越重视产品的可靠性分析和设计。当前,可靠性活动基本已经贯穿了航空产品设计、生

产、试验和运行维护的全生命周期。

作为可靠性分析的常用分布形式之一,威布尔分布在飞机、航空发动机的可靠性分析工作中扮演了十分重要的角色。研究表明<sup>[2]22-25[3-4]</sup>,涡轮叶片、盘、轴等材料零件的寿命均符合威布尔分布。威布尔分布包含双参数模型<sup>[5-6]</sup>和三参数模型两种,与双参数模型

\*20221208收到初稿,20230112收到修改稿。国家自然科学基金项目(52105163),上海市科技启明星项目(22QB1406400)资助。

\*\*张剑锋,男,1987年生,湖南岳阳人,汉族,中国航发商用航空发动机有限责任公司材料工程部高级工程师,博士,主要研究方向为材料检测评价、数据统计分析。

相比,三参数模型能够更加准确地描述结构疲劳寿命或腐蚀损伤,其物理意义也更加合理。因此,该模型在材料强度与机械零件寿命评价中得到了广泛应用<sup>[7-9]</sup>。但是,由于模型的参数增多,三参数威布尔分布的参数估计难度也进一步增大。

对于三参数威布尔分布的参数估计,国内外研究者开展了大量研究工作,提出了极大似然估计法<sup>[22-25][10]</sup>、相关系数法<sup>[11-12]</sup>、概率加权矩法<sup>[13]</sup>、Grey Model-Support Vector Machine (GM-SVM)法<sup>[14]</sup>、蒙特卡洛点估计法<sup>[15]</sup>、灰色模型法<sup>[16]</sup>等方法<sup>[17]</sup>,然而上述研究未考虑估计的可信程度(置信度),无法满足机械和材料可靠性分析中的置信限计算问题。为解决材料强度数据计算中的三参数威布尔分布置信限计算问题,RICE R C等<sup>[18][218-220]</sup>提出了一种基于极大似然估计与经验公式相结合的方法(以下简称“MMPDS法”),但是该方法仅能计算存活率为90%或99%、置信度为95%情况下的估计值,无法计算其他存活率和置信度情况下的置信限;傅惠民等<sup>[19][153-162][20]1-8</sup>将三参数威布尔分布累积概率函数转换获得线性方程,再通过求线性方程相关系数最大时的参数估计值,进而获得三参数威布尔分布的参数估计值和置信限,计算过程较为简便,但是其计算精度仍有待进一步提高。

针对上述计算问题,本文提出了一种新的三参数威布尔分布参数估计和置信限计算方法,并将该方法应用于不同样本量情况下材料强度的三参数威布尔分布参数估计和置信限计算,将计算结果与MMPDS法、傅氏法计算结果进行了比较分析。

## 1 三参数威布尔分布概率模型

设样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 按从小到大的顺序排列,服从三参数威布尔分布,则其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (1)$$

式中, $\alpha$ 为比例参数; $\beta$ 为形状参数; $\tau$ 为位置参数,满足 $\tau < x_1, \beta > 0, \alpha > 0$ 。其累积分布函数为

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (2)$$

## 2 三参数威布尔分布相关-回归法

为解决傅氏法在计算过程中将三参数威布尔分布累积概率函数转换获得线性方程,进而求该线性方程参数估计值而导致的精度损失问题,本文采用傅氏法与非线性回归法相结合方法,利用傅氏法获取初值,通过处理三参数威布尔分布累积分布函数逆函数最优化问题,从而获得三参数威布尔分布的较高精度参数估计值,具体步骤如下。

### 2.1 参数初值计算

令

$$Y = \ln\{-\ln[1 - F(x)]\} \quad (3)$$

$$X = \ln(x - \tau) \quad (4)$$

$$B = \ln \alpha^\beta \quad (5)$$

则式(3)转化为线性方程

$$Y = \beta X - B \quad (6)$$

根据式(3)、式(4),可将样本数据 $[x_i, F(x_i)]$ 转换计算得到 $(X_i, Y_i)$ ,则式(6)的相关系数 $R(X, Y)$ 计算式为

$$R(X, Y) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}\right)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n \bar{Y}^2\right)}} \quad (7)$$

其中

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (8)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (9)$$

综合式(3)~式(9)可以发现, $\tau$ 为式(6)中唯一待估参量,最优 $\tau$ 即为式(6)相关系数 $R$ 最大时所对应的值, $R \in [0, 1]$ 。由于式(7)形式复杂,直接求解其最大值较为困难。考虑到 $0 \leq \tau < x_1$ ,可以证明 $R(X, Y)$ 对 $\tau$ 的1阶导数在 $0 \sim x_1$ 区间单调,即 $\tau$ 只存在一个解<sup>[21]</sup>。因此,可以在区间 $(0, x_1)$ 采用二分法计算得到较高精度的 $\tau_0$ 值。将计算得到 $\tau_0$ 和样本数据 $(X_i, Y_i)$ 代入式(6),对式(6)进行线性回归,即可得到 $\alpha_0, \beta_0$ 值。

对按从小到大顺序排列的三参数威布尔分布样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,若 $x_i$ 为第 $i$ 个次序观测值,则低于该次序观测值的累积概率 $P_i = F(x_i)$ 可通过以下方法计算得到。由于 $x_i$ 与样本密切相关,不同的样本会有不同的 $x_i$ 值,进而导致不同的 $P_i$ 值。这里, $P_i$ 也是随机变量,被称为第 $i$ 个秩统计量,其概率密度函数可表示为<sup>[22]</sup>

$$g_n(P_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} P_i^{i-1} (1-P_i)^{n-i} \quad (10)$$

对式(10)在区间 $[P_{\text{limit}(i)}, 1]$ 内进行定积分,则有

$$\int_{P_{\text{limit}(i)}}^1 g_n(P_i) dP_i = \gamma \quad (11)$$

式中, $P_{\text{limit}(i)}$ 为置信度 $\gamma$ 下的单侧置信下限, $\gamma \geq 50\%$ 。由于秩分布是一个 $\beta$ 分布,所以对式(10)、式(11)进行变换,可以求得

$$P_{\text{limit}(i)} = \frac{i!(n-i+1)}{F_{1-\gamma, 2(n-i+1), 2i} + i!(n-i+1)} \quad (12)$$

式中, $F_{1-\gamma, 2(n-i+1), 2i}$ 为自由度为 $2(n-i+1)$ 和 $2i$ 的 $F$ 分布的 $\gamma$ 分位数。

### 2.2 参数优化调整

由式(2)可知,当 $\tau < x_1, \beta > 0, \alpha > 0$ 时,三参数威布尔

分布累积概率分布函数可逆,其逆函数为

$$x = F^{-1}(y; \theta) = \alpha [-\ln(1 - y)]^{1/\beta} + \tau \quad (13)$$

因此,对于样本数据 $(y_i, x_i)$ ,可知 $y$ 与 $x$ 之间存在非线性函数关系式 $x=F^{-1}(y; \theta)$ ,其中 $\theta$ 为参数向量, $\theta=(\alpha, \beta, \tau)$ 。为估计参数 $\alpha, \beta, \tau$ ,可建立优化模型,求得令估计函数值与实测值残差最小的参数,即式(14)和式(15)成立:

$$\min \phi(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2(\theta) \quad (14)$$

$$r_i(\theta) = x_i - F^{-1}(y_i, \theta), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

式中, $n \geq 2$ 。令 $r(\theta) = [r_1(\theta), r_2(\theta), \dots, r_n(\theta)]^T$ ,则优化目标函数式(14)可变化为

$$\min \phi(\theta) = \frac{1}{2} \|r(\theta)\|^2 \quad (16)$$

若 $r_i(\theta)(i=1, 2, \dots, n)$ 2阶连续可微, $\phi(\theta)$ 的1阶导数为

$$\nabla \phi(\theta) = \mathbf{J}(\theta)^T r(\theta) \quad (17)$$

式中, $\mathbf{J}(\theta)$ 为 $r(\theta)$ 的Jacobian矩阵。

同时, $\phi(\theta)$ 的Hessian矩阵为

$$\mathbf{H}(\theta) = \nabla^2 \phi(\theta) = \mathbf{J}(\theta)^T \mathbf{J}(\theta) + \mathbf{G}(\theta) \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{G}(\theta) = \sum_{i=1}^n r_i(\theta) \nabla^2 r_i(\theta) \quad (19)$$

$$\mathbf{J}(\theta) = \left( \frac{\partial r_i(\theta)}{\partial \theta_j} \right); \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (20)$$

由式(17)~式(20)可知,综合各式,获得式(17)为零时的 $\theta$ 值,则上述优化问题解决。但直接求解过于复杂,且常常无法求解,一般采用迭代法求解。常用的迭代算法有 Gauss-Newton 算法, Levenberg-

Marquardt(L-M)算法,还有 New-Raphson 法等。L-M 算法因为采用目标函数的2阶微分,利用方向矢量调整计算收敛方向,可以获得较好的收敛效果和速度,本文推荐采用 L-M 算法,具体计算方法参见文献[23]。

根据 L-M 算法编制 Python 程序进行计算,计算过程中给定的初值为第 2.2 节计算得到的 $\alpha_0, \beta_0, \tau_0$ ,经迭代计算后,即可得到优化后的参数估计值 $\alpha, \beta, \tau$ 。

### 3 三参数威布尔分布参数估计及置信限的计算

为检验估计效果,以某退火状态合金钢板纵横向抗拉强度为例,采用本文提出的相关-回归法对其不同样本量数据的三参数威布尔分布模型参数进行了估计,对不同置信限 $T_{(99\%, 50\%)}$ 值(存活率为99%,置信度为50%)和 $T_{(99\%, 95\%)}$ 值(存活率为99%,置信度为95%)进行了计算,并对估计值与实测值之间的相关系数进行了评估。

计算数据来自文献[18]<sup>218-220</sup>表 9.8.1,总样本量为 330,利用 Python 程序随机选取其中的部分数据,生成了 18 个不同样本量的样本,其样本数量分别为 25、30、35、40、45、50、60、70、80、90、100、120、150、180、210、240、270、300,共 19 个样本。对生成的各样本进行 Anderson-Darling 三参数威布尔检验,确保各样本均能够满足三参数威布尔分布。

此外,为比较不同方法之间估计效果的差异,本文还采用 MMPDS 法、傅氏法对上述数据进行了三参数威布尔模型参数的估计计算、不同置信限 $T_{(99\%, 50\%)}$ 值和 $T_{(99\%, 95\%)}$ 值计算以及估计值与实测值之间的相关系数计算。其中, MMPDS 法计算过程参见文献[18]<sup>218-220</sup>第 9 章,傅氏法参见文献[19]<sup>153-162</sup>、文献[20]<sup>1-8</sup>。计算结果见表 1、表 2 和表 3。

表 1 不同样本量情况下相关-回归法参数估计值

Tab. 1 Parameter estimation value of correlation-regression method with different sample sizes

样本量 Sample size	$T_{(99\%, 50\%)}$ 值 Value				$T_{(99\%, 95\%)}$ 值 Value		
	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$	$R$	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$
25	13.337	3.599	138.267	0.978 4	33.576	9.126	116.500
30	8.104	1.629	143.394	0.960 2	8.456	2.016	141.289
35	12.491	2.950	138.244	0.989 0	20.671	5.113	128.611
40	16.198	3.352	136.394	0.972 2	26.242	5.577	124.738
45	17.622	3.762	133.915	0.974 9	31.770	6.890	118.293
50	13.192	3.508	138.464	0.986 8	24.370	6.684	126.205
60	10.291	2.054	141.330	0.980 0	11.783	2.593	138.538
70	18.925	4.583	132.342	0.995 7	39.664	9.702	110.574
80	10.504	2.875	139.915	0.987 1	14.087	4.063	135.497
90	10.900	2.435	140.608	0.994 3	13.134	3.139	137.412
100	17.779	4.147	133.935	0.992 4	30.292	7.232	120.542
120	11.140	2.764	140.532	0.991 1	13.669	3.567	137.242
150	11.460	2.776	140.129	0.991 2	13.579	3.445	137.304
180	12.862	3.226	138.447	0.993 5	15.823	4.105	134.858

续表

样本量 Sample size	$T_{(99\%, .50\%)}值 Value$				$T_{(99\%, .95\%)}值 Value$		
	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$	$R$	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$
210	12.805	3.297	138.423	0.994 1	15.619	4.149	135.043
240	11.553	2.649	140.055	0.989 6	13.061	3.129	137.958
270	12.653	2.978	138.720	0.994 3	14.616	3.563	136.211
300	12.849	3.024	138.564	0.993 5	14.725	3.579	136.167
330	12.616	2.992	138.829	0.993 9	14.339	3.512	136.614

表 2 不同样本量情况下傅氏法参数估计值

Tab. 2 Parameter estimation value of Fu method with different sample sizes

样本量 Sample size	$T_{(99\%, .50\%)}值 Value$				$T_{(99\%, .95\%)}值 Value$		
	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$	$R$	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$
25	10.661	2.608	140.865	0.970 7	26.194	6.952	123.824
30	12.335	2.691	139.639	0.944 6	14.010	3.192	136.091
35	11.391	2.572	139.300	0.987 2	16.840	4.092	132.351
40	17.550	3.636	135.117	0.971 8	26.618	5.554	124.369
45	18.464	3.908	133.127	0.974 6	30.109	6.395	119.940
50	9.741	2.262	141.766	0.967 3	16.696	4.418	133.751
60	14.283	3.109	137.656	0.968 3	16.021	3.524	134.537
70	18.874	4.544	132.400	0.995 7	37.254	9.046	112.973
80	13.546	3.923	137.011	0.982 7	17.283	4.977	132.390
90	12.085	2.785	139.509	0.992 9	13.883	3.320	136.703
100	14.717	3.206	136.922	0.988 4	22.636	5.234	128.101
120	10.506	2.532	141.133	0.990 3	11.896	3.027	138.931
150	13.109	3.301	138.566	0.989 4	15.268	3.913	135.683
180	15.476	4.073	135.926	0.991 1	18.789	4.948	131.973
210	14.668	3.929	136.622	0.992 6	17.292	4.641	133.418
240	14.381	3.526	137.371	0.984 5	15.740	3.856	135.401
270	14.015	3.412	137.417	0.993 1	15.667	3.854	135.202
300	14.036	3.394	137.430	0.992 7	15.760	3.864	135.173
330	14.022	3.438	137.485	0.992 7	15.598	3.866	135.405

表 3 不同样本量情况下 MMPDS 法参数估计值

Tab. 3 Parameter estimation value of MMPDS method with different sample sizes

样本量 Sample size	$T_{(99\%, .50\%)}值 Value$				$T_{(99\%, .95\%)}值 Value$		
	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$	$R$	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$
25	10.985	3.084	140.480	0.974 0	364.568	100.000	-212.673
30	16.987	3.560	135.215	0.924 2	449.421	84.522	-296.512
35	11.076	2.705	139.537	0.986 6	164.181	42.671	-12.851
40	24.862	5.209	127.966	0.964 0	477.153	95.397	-323.873
45	14.689	3.102	136.680	0.973 1	47.663	10.230	104.262
50	11.380	3.111	140.178	0.984 1	67.092	19.864	84.964
60	11.047	2.182	140.550	0.978 8	12.563	2.592	139.256
70	23.940	6.024	127.416	0.994 0	425.126	100.000	-273.600
80	10.210	2.803	140.156	0.987 0	14.434	4.136	136.163
90	13.453	3.120	138.230	0.990 5	30.238	7.041	121.852
100	24.366	5.996	127.496	0.988 7	437.411	100.000	-285.401
120	10.512	2.625	141.105	0.990 8	14.977	3.844	136.893
150	13.432	3.296	138.266	0.989 4	21.584	5.310	130.363

续表

样本量 Sample size	$T_{(99\%, .50\%)}值 Value$				$T_{(99\%, .95\%)}值 Value$		
	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$	$R$	比例参数 Scale parameter $\alpha$	形状参数 Shape parameter $\beta$	位置参数 Location parameter $\tau$
180	12.727	3.186	138.556	0.993 5	16.603	4.248	134.852
210	13.765	3.570	137.503	0.993 8	19.960	5.248	131.492
240	12.246	2.801	139.389	0.989 2	14.149	3.297	137.621
270	12.418	2.911	138.925	0.994 2	14.851	3.545	136.636
300	12.778	2.994	138.619	0.993 4	15.394	3.662	136.144
330	12.747	3.016	138.696	0.993 8	15.210	3.651	136.366

图1、图2分别给出了样本量为25、100时,采用MMPDS法、傅氏法、相关-回归法计算得到的三参数威布尔分布累积概率函数拟合曲线与实际数据的对比情况。可以看出,3种方法总体拟合效果较好,样本量为100时拟合效果优于样本量为25时的拟合效果。由于篇幅所限,其他样本量情况下3种方法拟合效果的比较图不再逐一列出。

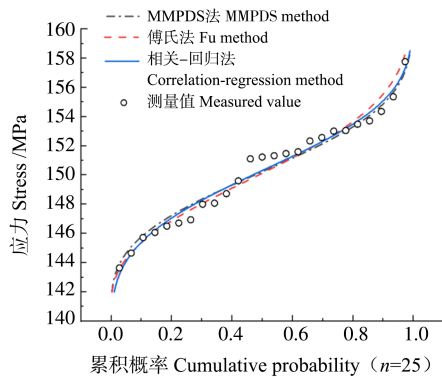


图1 3种方法的拟合结果(样本量为25)

Fig. 1 Fitting results of three methods (sample size is 25)

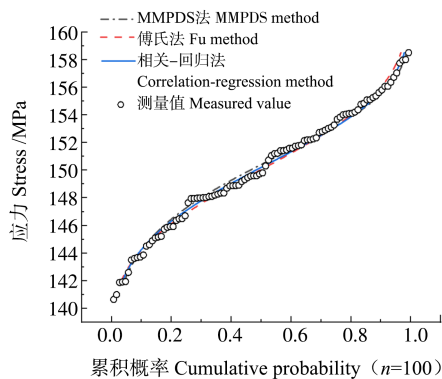


图2 3种方法的拟合结果(样本量为100)

Fig. 2 Fitting results of three methods (sample size is 100)

## 4 结果分析

### 4.1 不同样本量情况下参数估计效果比较

图3为不同样本量情况下MMPDS法、傅氏法、相关-回归法计算得到的估计值与实测值相关系数变化情况,该估计值利用 $T_{(99\%, .50\%)}$ 值对应参数计算,其相关系数是基于3次抽样计算得到的平均值。可以看出,3

种方法得到的相关系数均较高,这与以下两方面的原因有关:①所有样本均通过了Anderson-Darling三参数威布尔分布检验,即样本的分布形式确定且服从三参数威布尔分布;②所选取的样本最小样本量为25,已经较为接近传统统计学意义上的非小样本量30。

尽管3种方法得到的相关系数总体偏高,图3仍然表明样本量和方法对估计数据的影响显著。相关-回归法计算值与实测值的相关系数,无论是在样本量较低还是较高时,均高于其他两种方法。在样本量较低时,MMPDS法、傅氏法计算得到的相关系数明显低于相关回归法,随着样本量增加这种差异逐渐减小。其中,傅氏法得到的相关系数最低,也就是说其估计值与实测值差异较大,MMPDS法次之。这与傅氏法在计算三参数威布尔分布的参数估计值时,实际上对其优化方程进行简化有关[见式(6)],该计算式 $X$ 与 $Y$ 之间的最优,而不是全局最优,而MMPDS法在进行三参数威布尔分布的参数估计时,实际上使用的是最大似然法,该方法能够较好估计较高样本量情况下三参数威布尔分布模型中的参数。

此外,样本量对参数估计效果的影响也较为明显。样本量较小时,三种方法计算得到的相关系数均相对较低且波动显著其中,最低 $R$ 值为样本量为30时MMPDS法计算得到,为0.938;随着样本量增加相关系数逐渐增高,当样本量达到300后,相关回归法计算得到相关系数可达到0.993。

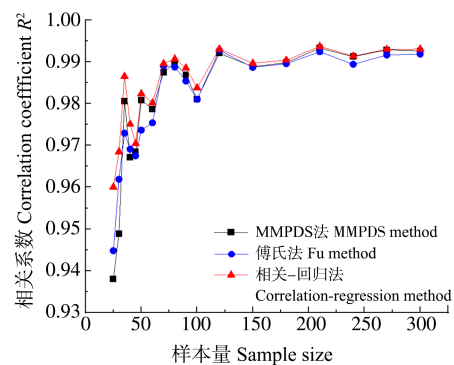


图3 不同样本量情况下不同方法估计值与实测值相关系数变化情况  
Fig. 3 Variations of correlation coefficient between estimated values and actual values with different sample sizes using different methods

## 4.2 不同样本量情况下置信限的计算结果

图 4 和图 5 是不同样本量情况下基于 3 次抽样采用 MMPDS 法、傅氏法、相关-回归法计算得到的  $T_{(99\%,50\%)}$  值和  $T_{(99\%,95\%)}$  值的平均值, 误差带表示标准差。可以看出, 在样本量较小时, 估计值存在较大的波动性, 且不同方法之间的差异较大, 样本量较大时, 估计值的波动性显著减小, 且不同方法之间的差异变小。

对于  $T_{(99\%,50\%)}$  值, 当样本数小于 100 时, 相同样本量情况下, 各方法之间的平均差值为 0.95 MPa, 最大达到 2.53 MPa, 且不同样本量对  $T_{(99\%,50\%)}$  值的计算产生显著影响, 当样本数量相差 10 时,  $T_{(99\%,50\%)}$  值的波动最大达到 3.28 MPa; 当样本超过 100 时, 相同样本量情况下各方法之间平均差值为 0.29 MPa, 最大差值为 0.52 MPa, 这时不同样本量对  $T_{(99\%,50\%)}$  值的计算影响变小, 样本数量相差 10 引起的  $T_{(99\%,50\%)}$  值波动处于 0.03 MPa ~ 1.08 MPa。

对于  $T_{(99\%,95\%)}$  值, 当样本数小于 100 时, 相同样本量情况下, 各方法之间的差异值较  $T_{(99\%,50\%)}$  值更为显著, 平均差值达到 6.56 MPa, 最大能够达到 14.28 MPa, 其中 MMPDS 法估计值显著低于傅氏法和相关-回归法, 不同样本之间 (样本数量相差 10)  $T_{(99\%,95\%)}$  值的波动最大达到 9.14 MPa; 当样本量大于 100 时, 各方法之间的差值明显减小, 相同样本量情况下各方法之间的平均差值约为 1.08 MPa, 样本量对估计值波动性的影响也越来越小, 样本数量相差 10 引起的  $T_{(99\%,95\%)}$  值波动最大达到 3.74 MPa。

上述分析表明, 对于相同样本数量, 相关回归法计算得到的置信限 (无论是  $T_{(99\%,50\%)}$  值, 还是  $T_{(99\%,95\%)}$  值) 最高, 当样本量小于 100 时, MMPDS 法计算得到的置信限最为保守, 当样本量大于 100 时, 傅氏法计算得到的  $T_{(99\%,50\%)}$  值最为保守, MMPDS 法计算得到的  $T_{(99\%,95\%)}$  值最为保守。这与上述 3 种方法基于不同样本量数据计算  $T_{(99\%,50\%)}$  值参数得到的估计值与实测值的相关系数恰好对应, 当样本量小于 100 时, MMPDS 法得到相关系数最低, 因此, 其  $T_{(99\%,50\%)}$  值最为保守, 当样本量大于 100 时, 傅氏法得到的相关系数最低, 因此, 其  $T_{(99\%,50\%)}$  值最为保守, 而这 3 种方法中, 相关-回归法得到的相关系数为最高, 因此, 其估计值最高, 能够使得材料性能充分被发挥。MMPDS 法在较小样本量 (样本量小于 100) 时, 相关系数较低, 计算得到的置信限与其他方法相差较大, 其原因与计算过程中部分系数采用了经验拟合法有关, 当样本量越少时, 经验拟合法的误差越大。

另外, 以上分析也表明, 当样本量较小时, 估计方法对估计值的影响更为显著。因此, 在样本量较小时, 相关-回归法计算置信限的优势更为明显。

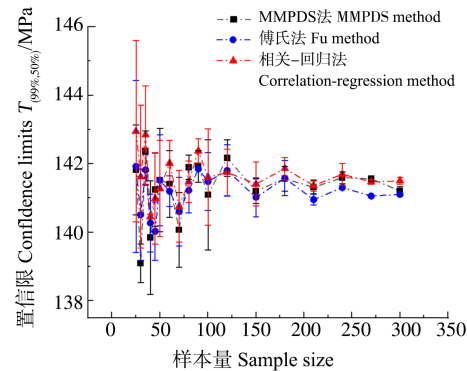


图 4 不同样本量情况下不同方法  $T_{(99\%,50\%)}$  估计值

Fig. 4 Estimated value of  $T_{(99\%,50\%)}$  for different methods under different sample sizes

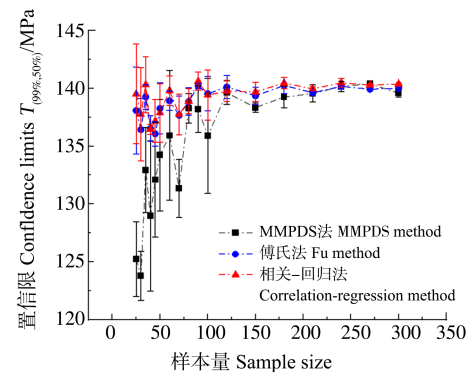


图 5 不同样本量情况下不同方法  $T_{(99\%,95\%)}$  估计值

Fig. 5 Estimated value of  $T_{(99\%,95\%)}$  for different methods under different sample sizes

## 5 结论

本文将傅氏法和非线性回归法相结合, 建立了适用于三参数威布尔分布参数估计和置信限计算的相关-回归法, 并应用于某合金强度值置信限计算, 主要结论如下:

1) 三参数威布尔分布情况下, 相关-回归法、MMPDS 法、傅氏法估计值与实测值相关系数结果相比: 当样本量小于 100 时, MMPDS 法相关系数最低; 当样本量大于 100 时, 傅氏法相关系数最低; 而相关-回归法在不同样本量情况下较其他两种方法均有最高的相关系数。

2) 不同方法计算得到的置信限不同, 相关-回归法计算结果更高, 能够使得材料性能得以充分发挥, MMPDS 法与傅氏法计算结果较保守, 当样本量小于 100 时, 相关-回归法计算置信限的优势更为显著。

## 参考文献 (References)

- [1] 何葵晖, 唐家银. Weibull 型无故障数据下综合 Bayes 置信可靠性评估模型[J]. 机械强度, 2020, 42(3): 610-616.  
HE WuHui, TANG JiaYin. Integrated Bayesian confidence reliability evaluation model based on Weibull type zero-failure data[J]. Journal of Mechanical Strength, 2020, 42(3): 610-616 (In Chinese).

- [ 2 ] 杨谋存, 聂 宏. 三参数 Weibull 分布参数的极大似然估计数值解法[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(1): 22-25.  
YANG MouCun, NIE Hong. Advanced algorithm for maximum likelihood estimation of three parameter Weibull distribution [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007, 39(1): 22-25 (In Chinese).
- [ 3 ] 李书明, 董成利, 黄燕晓. 基于威布尔的发动机涡轮叶片寿命可靠性评估[J]. 中国民航大学学报, 2008, 26(4): 14-17.  
LI ShuMing, DONG ChengLi, HUANG YanXiao. Evaluate reliableness of aero-engine turbine blades based on Weibull distributing [J]. Journal of Civil Aviation University of China, 2008, 26(4): 14-17 (In Chinese).
- [ 4 ] 万宏强, 高 刚, 丁 锋. GH4133 轮盘材料疲劳失效概率分布类型研究[J]. 机械强度, 2017, 39(1): 166-171.  
WAN HongQiang, GAO Gang, DING Feng. Studying of probability distribution types of fatigue failure for GH4133 disc materials [J]. Journal of Mechanical Strength, 2017, 39(1): 166-171 (In Chinese).
- [ 5 ] 陈道礼. 双参数威布尔分布的参数区间估计的直接方法[J]. 机械强度, 1996, 18(3): 31-36.  
CHEN DaoLi. A direct approach to interval estimation of parameters of the two-parameter Weibull distribution [J]. Journal of Mechanical Strength, 1996, 18(3): 31-36 (In Chinese).
- [ 6 ] 李 剑, 张群会. 两参数威布尔分布中参数的极大似然估计量的迭代求解方法[J]. 机械强度, 1994, 16(3): 67-68.  
LI Jian, ZHANG QunHui. A iterative method for the maximum likelihood estimate of the two parameters in the two-parameters Weibull distribution [J]. Journal of Mechanical Strength, 1994, 16(3): 67-68 (In Chinese).
- [ 7 ] 高 潮, 何宇廷, 侯 波, 等. 飞机结构疲劳寿命分散系数研究[J]. 机械强度, 2016, 38(5): 1076-1081.  
GAO Chao, HE YuTing, HOU Bo, et al. On fatigue life scatter factor for the aircraft structure [J]. Journal of Mechanical Strength, 2016, 38(5): 1076-1081 (In Chinese).
- [ 8 ] 付 涛, 王德成, 程 鹏. 基于威布尔分布的圆柱螺旋压缩弹簧疲劳寿命分析[J]. 机械强度, 2020, 42(1): 81-86.  
FU Tao, WANG DeCheng, CHENG Peng. Fatigue life analysis of cylindrical helical compression spring based on Weibull distribution [J]. Journal of Mechanical Strength, 2020, 42(1): 81-86 (In Chinese).
- [ 9 ] 于晓红, 张来斌, 王朝晖, 等. 基于新的威布尔分布参数估计法的设备寿命可靠性分析[J]. 机械强度, 2007, 29(6): 932-936.  
YU XiaoHong, ZHANG LaiBin, WANG ZhaoHui, et al. Reliability life analysis of the equipment based on new Weibull distribution parameter estimation method [J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(6): 932-936 (In Chinese).
- [ 10 ] 范 英, 王顺坤, 晋民杰. 多种数据状态下三参数 Weibull 分布的极大似然估计[J]. 机械强度, 2012, 34(1): 53-57.  
FAN Ying, WANG ShunKun, JIN MinJie. Maximum likelihood estimation of three-parameter Weibull distribution in wide range of data state [J]. Journal of Mechanical Strength, 2012, 34(1): 53-57 (In Chinese).
- [ 11 ] 傅惠民, 高镇同. 确定威布尔分布三参数的相关系数优化法[J]. 航空学报, 1990, 11(7): 323-327.  
FU HuiMin, GAO ZhenTong. An optimization method of correlation coefficient for determining a three-parameter Weibull distribution [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1990, 11(7): 323-327 (In Chinese).
- [ 12 ] PARK C. Weibullness test and parameter estimation of the three-parameter Weibull model using the sample correlation coefficient [J]. International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice, 2017, 24: 376-391.
- [ 13 ] 严晓东, 马 翔, 郑荣跃, 等. 三参数威布尔分布参数估计方法比较[J]. 宁波大学学报(理工版), 2005, 18(3): 301-305.  
YAN XiaoDong, MA Xiang, ZHENG RongYue, et al. Comparison of the parameters estimation methods for 3-parameter Weibull distribution [J]. Journal of Ningbo University (Natural Science & Engineering Edition), 2005, 18(3): 301-305 (In Chinese).
- [ 14 ] 高 斌, 曹克强, 胡良谋, 等. 基于 GM-SVM 的三参数威布尔分布参数估计[J]. 机械强度, 2018, 40(3): 632-638.  
GAO Bin, CAO KeQiang, HU LiangMou, et al. 3-parameter Weibull distribution estimation based on GM and SVM [J]. Journal of Mechanical Strength, 2018, 40(3): 632-638 (In Chinese).
- [ 15 ] 南东雷, 贾志新, 李 威. 三参数威布尔分布的蒙特卡洛点估计方法[J]. 机械设计与制造, 2017(1): 142-144.  
NAN DongLei, JIA ZhiXin, LI Wei. Monte Carlo based parametric point estimation for three parameter Weibull distribution [J]. Machinery Design & Manufacture, 2017(1): 142-144 (In Chinese).
- [ 16 ] 郑荣跃, 严剑松. 威布尔分布参数估计新方法研究[J]. 机械强度, 2002, 24(4): 599-601.  
ZHENG RongYue, YAN JianSong. New estimation method of three-parameter Weibull distribution [J]. Journal of Mechanical Strength, 2002, 24(4): 599-601 (In Chinese).
- [ 17 ] 刘 飞, 王祖尧, 窦毅芳, 等. 基于 Gibbs 抽样算法的三参数威布尔分布 Bayes 估计[J]. 机械强度, 2007, 29(3): 429-432.  
LIU Fei, WANG ZuYao, DOU YiFang, et al. Bayesian analysis of three-parameter Weibull distribution based on Gibbs sampling algorithm [J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(3): 429-432 (In Chinese).
- [ 18 ] RICE R C, JACKSON J L, BAKUCKAS J, et al. Metallic materials properties development and standardization (MMPDS) handbook-11: Chapter 9 [M]. Columbus: Battelle Memorial Institute, 2011: 218-220.
- [ 19 ] 傅惠民, 高镇同, 徐人平. 三参数威布尔分布的置信限[J]. 航空学报, 1992, 13(3): 153-162.  
FU HuiMin, GAO ZhenTong, XU RenPing. Confidence limits of three-parameter Weibull population percentiles [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1992, 13(3): 153-162 (In Chinese).
- [ 20 ] 傅惠民, 高镇同, 徐人平. 母体百分位值的置信下限[J]. 北京航空航天大学学报, 1990, 16(3): 1-8.  
FU HuiMin, GAO ZhenTong, XU RenPing. A confidence lower limit of population percentile [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1990, 16(3): 1-8 (In Chinese).
- [ 21 ] 史景钊, 蒋国良. 用相关系数法估计威布尔分布的位置参数[J]. 河南农业大学学报, 1995, 29(2): 167-171.  
SHI JingZhao, JIANG GuoLiang. Estimate the state parameter of Weibull distribution by the relative coefficient method [J]. Journal of Henan Agricultural University, 1995, 29(2): 167-171 (In Chinese).
- [ 22 ] KAPUR K C, LAMBERSON L R. Reliability in engineering design [M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1977: 605.
- [ 23 ] BATES D M, WATTS D G. Nonlinear regression analysis and its applications [M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1988: 67-133.