

惯性张量测量研究综述*

A REVIEW OF INERTIAL TENSOR MEASUREMENT RESEARCH

赵 赫** 马卫平*** 杨洪涛

(郑州机械研究所有限公司, 郑州 450052)

ZHAO He MA WeiPing YANG HongTao

(Zhengzhou Research Institute of Mechanical Engineering Co., Ltd., Zhengzhou 450052, China)

摘要 惯性张量是描述刚体做定点转动时转动惯性的量度,是控制系统设计的关键参数。近年来,飞行器技术的发展使得精确测量大尺寸异形体的惯性张量的需求变得十分迫切。首先,回顾了惯性张量测量的研究历程及当前存在的问题,分别讨论了扭摆法、复摆法、能量法和参数法等方法的测量原理。然后,探讨了这些测量方法在测量大尺寸异形体的惯性张量时需要面对的诸如测量误差的来源和误差补偿等问题。最后,总结了惯性张量测量的发展历程,并指出了目前研究存在的问题和后续的研究方向。

关键词 惯性张量 综述 空气阻尼 大尺寸不规则体

中图分类号 TH701

Abstract The inertia tensor is a measure of the rotational inertia of a rigid body when it rotates around a fixed point, and it is a key parameter in the design of control systems. The recent development of aircraft technology has made the need to accurately measure the inertia tensor of large-size irregular objects very urgent. Firstly, the research history and current problems of inertia tensor measurement were reviewed, and the measurement principles of methods such as the torsion pendulum method, the compound pendulum method, the energy method, and the parameter method were discussed respectively. Secondly, the issues such as the sources of measurement errors and error compensation that need to be faced when these measurement methods measure the inertia tensor of large-size irregular bodies were explored. Finally, the development history of inertia tensor measurement and point out the current problems and the follow-up research directions was summarized.

Key words Inertial tensor; Review; Air damping; Large-size irregular objects

Corresponding author: MA WeiPing, E-mail: jxsmwp@163.com

Manuscript received 20240119, in revised form 20240419.

0 引言

惯性张量是描述刚体做定点转动时转动惯性的量度,作为一个二阶对称张量,其分量包括转动惯量(即质量惯性矩)和质量惯性积。惯性张量主要应用于运动分析^[1]和控制系统设计^[2]。早期的测量工作是在等比例放大的物理实验设备上进行的^[3],通过分析待测物体对特定旋转轴的周期,得到待测物体的转动量,然后通过改变测量位姿获得物体惯性张量。此后研究人员根据待测物体自身的特性,尝试开发了一系列专用的惯性张量测量设备,以飞行器的惯性张量测量^[4-5]为例,由弹簧与支撑装置组成的测量设备在 20 世纪中叶逐渐发展成熟并得到了广泛应用。

飞行器技术的发展使得飞行器的尺寸与形状特征都发生了巨大变化。有必要设计一种强大、集成的质量特性测试设备来提高系统的通用性^[6],使得通过单一实验设备即可完成对惯性张量的测量,此类设备在近三十年有较多的应用^[7-9]。国内外的科研工作者对提高测量精度进行了长期的研究,通过使用新技术改造测量装置^{[10][11]4787}或分析测量装置中的阻尼^{[12]69-71[13-14]}获得更精确的惯性张量数值。在此期间,也出现了使用其他原理的测量方式,例如基于信号分析的参数法、基于能量守恒原理的能量法、基于刚体完全运动方程的测量方法等。

总体来说,惯性张量测量技术经历了从物理实验设备到专用设备再到通用一体化测量设备;从分析运

* 20240119 收到初稿, 20240419 收到修改稿。

** 赵 赫,男,1998 年生,河北保定人,汉族,郑州机械研究所有限公司硕士研究生,主要研究方向为振动分析。

*** 马卫平(通信作者),男,1976 年生,河南郑州人,汉族,郑州机械研究所有限公司高级工程师,主要研究方向为机械振动故障诊断、动平衡技术、信号分析及机器状态监测等。

动周期到分析运动信号的改变的过程。本文根据惯性张量中各分量测量原理的不同,将惯性张量的测量系统分为独立测量系统与整体测量系统,并按此分类综述前人的工作。

1 独立测量

独立测量是指分别测量转动惯量与质量惯性积的具体数值然后获取惯性张量的测量方法。

1.1 转动惯量的测量

转动惯量测量的实验法主要包括扭摆法、三线摆法、复摆法和落体法。其测量方法较多,但各种测量方法的局限性也十分明显,例如扭摆法的测量精度受到阻尼因素的影响^{[12]69-71};落体法同样要面对阻尼因素的影响,同时其线轮部件的转动惯量需要通过其他方法测量^[15],这加大了误差;三线摆法测量过程中会出现平动与转动的耦合^[16];复摆法在摆角较大时会遇到非线性问题^{[17]46-48}。关于转动惯量测量原理的综述国内已有多篇论文^[18-19],本节将论述近三年有较多研究的扭摆法与复摆法的测量原理和相应的研究进展,以及较少见诸国内文献的能量法。

1.1.1 扭摆法

扭摆法的测量装置如图1所示。

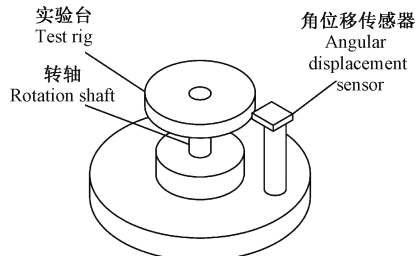


图1 扭摆法测量装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the torsion pendulum method measurement device

传统的测量方法是将待测物体置于实验台上,通过施加外力使实验台转过一定的角度,在转角最大位置释放实验台,使其发生扭转^[20]运动并测量这一运动的周期。改变待测物体与转轴之间的位置关系以测量其三轴转动惯量的工作称为改变测量位姿。

理想状态下扭摆做无阻尼自由振动的方程为

$$(J + J_0)\ddot{\theta} + K\theta = 0 \quad (1)$$

式中, J 为待测物体对于转轴的转动惯量; J_0 为实验台对于转轴的转动惯量; θ 为实验台转过的角度; K 为与转轴刚度有关的一个常量。 J_0 与 K 可以通过标准件标定^[21]过程获得。

其线性测量模型为

$$J = \frac{K}{4\pi^2} T^2 - J_0 \quad (2)$$

式中, T 为实验测得的平均摆动周期。

从原理上看,误差主要来源于标准件标定过程中的误差^[22]和被忽略的阻尼。考虑阻尼的振动方程为

$$(J + J_0)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (3)$$

式中, C 为与扭摆阻尼有关的一个常量,可通过实验测定。

当待测物体为质量较小的简单回转体时, C 主要由空气的黏性阻尼决定^[23]。当待测物体质量较大时,测量系统内部的摩擦阻尼无法被忽略,传统的线性模型无法满足研究者们对测量精度的预期。转动惯量测量的非线性模型为

$$(J + J_0)\ddot{\theta} + F_f \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + C\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (4)$$

式中, F_f 为转轴支承轴承引起的摩擦阻尼相关的一个常量。

为求解式(4),赵岩^[24]研究了求解转动惯量测量非线性模型的过程,获得了有阻尼扭摆测量模型的近似解析解。分析非线性空气阻尼和非线性恢复力^[25]的作用,对现有的转动惯量测量模型进行了修正,通过实验验证了该测量模型的有效性。论文中还提出了一种基于希尔伯特-黄变换(Hilbert-Huang Transform, HHT)的扭摆测量方法,研究了转动惯量与瞬时无阻尼固有频率之间的关系。张晓琳等^[26]对HHT测量方法进行了优化,其核心思路是直接采集角位移信号消除平均周期的影响。首先利用经验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD)提高信噪比获取主位移函数,然后利用希尔伯特变换(Hilbert Transform, HT)获取扭摆振动的瞬时参数,最终建立了转动惯量的非线性测量模型。CHEN Y等^{[11]4787}将视觉识别技术引入了扭摆装置中,此方法与之前通用方法最大的差异是,扭摆的振幅由视觉识别传感器测得,通过传感器数据能直接分析出扭摆振动的主频率和幅值。

空气阻尼对大尺寸异形体影响较大^[27-28],认为空气阻尼产生的阻尼力矩与扭摆角速度成正比的假设过于简单,与实际不符。郭志荣等^[29-30]针对测量过程中的阻尼问题提出了一种新的测量技术,通过阻尼屏蔽装置减小了空气阻尼对转动惯量测量的影响。但是这种测量方法是在物理教学实验的基础上进行改进的,而不是基于实际测量工作。

1.1.2 复摆法

根据结构的不同,复摆可以分为简单复摆与托架复摆,对应图2(a)与图2(b)。

图2中, l 为质心到挂载点的距离; θ 为质心与挂载点连线转过的角度。托架复摆相对于简单复摆有更广泛的适用性,因此实际测量装置以托架复摆为主,描述托架复摆的方程均可以写作

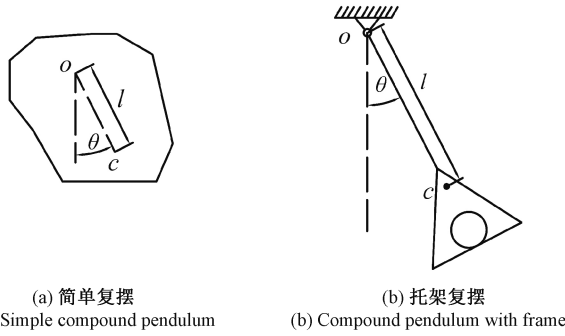


图 2 复摆法示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the compound pendulum

$$(J + J_0)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad (5)$$

式中, m 为待测物体质量。

复摆装置转过的初始角度较小时,可线性化为^[31]

$$(J + J_0)\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (6)$$

最终测得的转动惯量为

$$J = \frac{mgl}{4\pi^2} T^2 - J_0 \quad (7)$$

对于保守力系统可借助哈密顿量求解系统的非线性振动特性,文献[17]^[46-48]中阐述了式(5)的非线性求解方法。

从原理上看,复摆法误差来源于建模过程中忽略的阻尼和简化过程中忽略的非线性因素。除此之外,在实际测量中 l 是未知的,研究人员需要通过改变摆杆长度或标准件标定的方式来获取 l 的值。复摆中的阻尼主要为支承或挂载装置中的干摩擦阻尼和托架及待测物体引起的空气阻尼。文献[32]中阐述了阻尼在复摆法中引起误差的误差分析并介绍了两种阻尼的测量方法和实验设计。THY S 等^[33]设计了测定复摆运动中的空气阻尼和干摩擦阻尼的新方法,使用视觉识别技术或微角度传感器获取复摆托架的运动。复摆结构紧凑,可以整合在其他的测量系统中。这种测量系统被称为协同测量系统。卢志辉等^[34-35]提出了在同时具备扭摆和直立摆复摆结构的测量装置上测量转动惯量的方法。该方法借助任意两轴转动惯量之间的差值关系或比例关系,实现在两个测量位姿下获取三轴转动惯量的目的。因装卡方式简单,摆复摆对待测物体的形状要求较小^[36],因此大尺寸异形体也可在这一装置获取三轴转动惯量。

1.1.3 能量法

MELNIKOV V G^[37]提出了转动惯量测量的能量法,用于测量对称刚体或具有对称运动特性的机械系统的转动惯量。测量装置控制待测物体进行周期性的定轴转动,其原理如式(8)和式(9)所示:

$$(J_0 + J)(\omega_1^2 - \omega_0^2) = 2(A + V) \quad (8)$$

$$(J_0 + J)(\omega_0^2 - \omega_1^2) = 2(A' + V') \quad (9)$$

式中, ω_1 、 ω_0 分别为可控运动过程中的最大角速度和最小角速度; A 、 A' 分别为制动器和驱动电机上的有效力矩的功; V 、 V' 为运动过程中因阻尼损失的能量。

待测物体的转动惯量为

$$J = \frac{A' - A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} - J_0 \quad (10)$$

相较于扭摆法和复摆法,能量法消除了阻尼的影响,同时也消除了因标准件带来的误差,将转动惯量的测量值溯源至力矩和角速度。但能量法要求测量装置精确地控制电机,保证每次测量过程中 A' 是一致的。DUDARENKO N 等^[38]对测量设备进行改进,通过两组不同齿轮比的行星齿轮系统降低了对驱动电机的控制要求。

国内也有与能量法溯源思路相似的研究成果^[39],但这些方法都需要面对控制系统精度的问题。当待测物体为大尺寸异形体时,空气阻尼的影响变得更大,在完成运动分析前很难做到精确控制。应用能量法测量大尺寸异形体转动惯量的误差尚待进一步研究。

1.2 质量惯性积的测量

质量惯性积测量的实验法主要包括惯性椭球法与动平衡法。

1.2.1 惯性椭球法

惯性椭球法^{[40]40-42}是通过转动惯量来计算质量惯性积的方法,其计算原理为

$$\begin{aligned} J - md^2 &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ &2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - \\ &2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (11)$$

式中, d 为待测物体质心到扭摆轴的距离; J_x 、 J_y 、 J_z 分别为待测物体相对于 x 、 y 、 z 轴的三轴转动惯量; I_{yz} 、 I_{xz} 、 I_{xy} 分别为待测物体相对于 x 、 y 、 z 三轴的质量惯性积; α 、 β 、 γ 为 x 、 y 、 z 轴与扭摆转轴的夹角。

当三轴转动惯量被测定后,通过三组额外的测量位姿即可获取待测物体的质量惯性积。在实际的测量工作中,惯性椭球法通常与扭摆法联合使用^{[40]40-42[41]}。对于回转体,惯性椭球法的测量误差主要来源于两点,一是转动惯量的测量过程中的误差,二是实际测量位姿与理论测量位姿的不同带来的误差。当待测物体为大尺寸异形体时也需要考虑定轴转动中空气阻尼效应对惯性积带来的误差。

1.2.2 动平衡法

动平衡法^[42]测量质量惯性积的原理如图3所示。图中, z 轴为旋转轴; U_1 、 U_2 为偶不平衡量; Z_1 、 Z_2 为校正平面到坐标轴 xoy 平面的距离; φ 为主惯性轴 z' 与旋转轴 z 的夹角; e 为质心与旋转轴的偏心向量,计算式为式(12)。当质量为 m 的刚性待测物体以角速度 ω 绕 z 轴匀速旋转时,惯性力中只有离心力,作用于

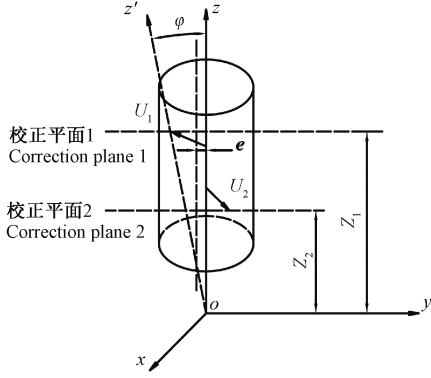


图3 动平衡法示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the dynamic balance method

o 点的惯性力矩计算式为式(13)。

$$e = x_c i + y_c j \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M &= \omega^2 \int Z(x_i + y_j) dm = \\ &\omega^2 (I_{zx} i + I_{yz} j) = \\ &\omega^2 (Z_1 U_1 + Z_2 U_2) \end{aligned} \quad (13)$$

由式(14)可得到偶不平衡量与惯性积的关系,即

$$I_{zx} i + I_{yz} j = Z_1 U_1 + Z_2 U_2 \quad (14)$$

动平衡法可同时在三轴转动惯量的测量位姿下测量惯性积,无需其他的测量位姿。相比惯性椭球法,动平衡法减少了因理论位姿与实际位姿带来的误差。

早期的测量设备是基于立式动平衡机开发的,但转子动平衡技术的最终目的是降低剩余不平衡量^[43-44],而惯性积测量的核心则是提高测量的精度。因此动平衡法测量惯性积的测量系统一般仍需独立设计^[45]。FAKHARI V 等^[46]利用多体动力学软件 MSC. Adams 构建了测量系统的虚拟样机,为测量系统的设计引入了新思路。他还分析了动平衡法测惯性积过程中测量系统内部的扰动,研究了皮带柔性、电机速度波动和旋转部件的不平衡响应等扰动源对测量结果的影响。

当待测物体为异形体时,测量过程可近似为对带有叶片的转子进行动平衡,此时要面对风阻效应的影响^[47],前人的数据表明,阻力随转速呈线性变化。但动平衡工作积累的数据更注重高速转动时的情况,对于测量质量惯性积所需要的低速状态尚待研究。

2 整体测量

整体测量是分析刚体动力学方程直接获取惯性张量的测量方法。待测物体在坐标原点下的广义坐标动力学方程可以表述为

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (15)$$

式中, M 为质量矩阵; C 为阻尼矩阵; K 为刚度矩阵; F 为相对原点的广义力向量; X 为相对原点的广义位

移向量。

参数法是基于式(15)的测量方法,其原理是借助待测物体在一定激振力作用下的运动响应求解质量矩阵,通过质量矩阵得出惯性张量与质心位置。使用参数法的测量设备中一般使用加速度传感器获得运动响应。参数法可细分为直接系统识别法^[48]、剩余惯量法^[49-50]和模态模型法^[51],从数学的角度来看,后两种方法均可被视作直接系统识别法的简化。

2.1 直接系统识别法

式(15)以 $\ddot{X}(t)$ 为目标函数进行傅里叶变换后可得

$$(M - \frac{1}{\Omega^2}K - \frac{j}{\Omega}C)\ddot{X}(j\Omega) = F(j\Omega) \quad (16)$$

系统的频率响应函数 (Frequency Response Function, FRF) 为

$$H(j\Omega) = \frac{\ddot{X}(j\Omega)}{F(j\Omega)} = \frac{1}{M - \frac{1}{\Omega^2}K - \frac{j}{\Omega}C} \quad (17)$$

又因为 M 、 C 、 K 为对称阵,式(16)可以变化为

$$\begin{aligned} \left[\ddot{X}T(j\Omega) - \frac{1}{\Omega^2}\ddot{X}T(j\Omega) - \frac{j}{\Omega}\ddot{X}T(j\Omega) \right] \begin{bmatrix} M \\ K \\ C \end{bmatrix} = \\ F^T(j\Omega) \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)中 $\ddot{X}T(j\Omega)$ 与 $F^T(j\Omega)$ 均为复数矩阵,将方程组(19)代入式(18)中可得方程组(20),即

$$\begin{cases} \ddot{X}T(j\Omega) = \ddot{X}_R^T + j\ddot{X}_i^T \\ F^T(j\Omega) = F_R^T + jF_i^T \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} X_R^T & -\Omega^{-2}X_R^T & -\Omega^{-1}X_R^T \\ X_i^T & -\Omega^{-2}X_i^T & -\Omega^{-1}X_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ K \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_R^T \\ F_i^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

此时未知量仍为矩阵形式,为求解其中的分量,将 M 、 C 、 K 中的各个元素定义为 m_{ij} 、 k_{ij} 、 c_{ij} ,定义向量 L 为

$$\begin{aligned} L = [m_{11}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{nn}, \\ k_{11}, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{nn}, \\ c_{11}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{nn}]^T \end{aligned} \quad (21)$$

式中, L 为 $3n(n+1)$ 维向量。

此时的式(19)可写作

$$[A]_{2n \times 3n(n+1)/2} L_{3n(n+1)/2 \times 1} = g_{2n \times 1} \quad (22)$$

为使式(22)有解,需满足 A 的行大于列,显然 $2n \geq 3n(n+1)$ 不成立,应通过测量 N 个不同频率下的 FRF,将 A 转变为 $2nN$ 行矩阵,对于刚性的待测物体 N 应为 6,即需要测量 6 个不同激振频率下待测物体的运动响应。

由以上推导过程可以看出,直接系统识别法有两

个缺陷:①对于复杂系统,随着自由度的增加,未知参数的数量也会增加,需在更多的激振频率下进行测量。②式(22)求解 L 的过程涉及逆矩阵运算,这会极大地降低测量精度。

直接系统识别法的测量装置与模态分析实验中的悬挂法装置类似。由于采样噪声的影响,不同激振频率下 FRF 的采样数据可能是线性相关的,为保证式(22)可解,通常需多次调整激振频率获取。

2.2 剩余惯量法

剩余惯量法是借助系统 FRF 中最高阶刚性模态与第一阶弹性模态之间的部分来测量惯性张量的方法。其原理是忽略刚度矩阵和阻尼矩阵的影响,将式(15)简化为

$$M\ddot{X}(t) = F(t) \quad (23)$$

式(23)的求解可以参照直接系统识别法。但在实际的测量工作中,研究人员会直接借助 FRF 获取惯性张量。典型的单自由度系统 FRF 如图 4 所示,图 4 中固有频率峰值右侧部分幅值基本一致,可以视作平行于横轴的直线。由式(16)可知,当 Ω 较大时,其幅值只与质量矩阵有关,这段线被命名为质量线。剩余惯量法也称质量线法。

剩余惯量法涉及的未知量较少,在测量时可以选择信噪比更好的频率区间,其测量迅速、原理简单、误差在可接受范围内。但在实际的测量工作中,悬挂点的刚度会直接影响 FRF^[52],当刚度过大时,若激振频率不够高则很难在采样曲线中获得质量线的幅值,最终无法测量惯性张量。

2.3 模态模型法

模态矩阵存在正交性^[53]。模态模型法利用了这一特性,额外建立了一个随待测物体运动的动坐标系,借助待测物体对动坐标系原点的振型矩阵构建线性方程组,将待测物体在固有频率下测得的运动响应作为已知量获取惯性张量。

FRF 在系统固有频率处的信噪比较高,数据也较为可靠,因此模态模型法相比直接系统识别法和剩余惯量法具备优势。但在实际的实验过程中一次激振实验难以激发出所需的全部模态。同时模态模型法也无法消除悬挂点刚度的影响,悬挂点引起的振型耦合问题则会直接导致测量失败^[54]。

2.4 整体测量的应用

理论上,选择整体测量获取大尺寸异形体惯性张量可以避免因大范围运动带来的空气阻尼的影响。现有文献中已实现的参数法误差普遍较大,无法满足飞行器领域的需求。CHIN A W 等^[55]在缩比模型上使用剩余惯量法获取了待测物体的惯性张量,为该方法在大尺寸飞行器上应用积累了工作经验并为未来的工

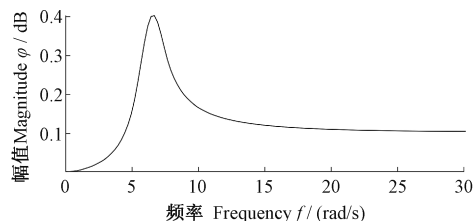


图 4 单自由度系统 FRF

Fig. 4 Frequency response function of a single degree of freedom system

作提供了建议。

此外,异形体的运动特征复杂,任何微小的输入误差都会导致测量结果输出中的误差放大数倍,这使得大尺寸异形体飞行器的测量精度难以进一步提高。后续工作也应尝试将直接参数法应用到对大尺寸异形体的测量工作中。

3 结束语

本文以测量原理为分类标准,介绍了惯性张量测量的不同的方法和相关的研究进展。

对于简单的回转体,各类惯性张量的测量方法已经成熟。使用扭摆法或复摆法搭配惯性椭圆法可以在较为简单的设备上获取它的惯性张量。

对于大尺寸异形体,依旧需要大量的工作实现对惯性张量的精确测量。无论是选择整体测量还是独立测量都需要对测试系统中的扰动进行进一步分析。

空气阻尼屏蔽技术应用于大尺寸异形体测量中的可行性尚待进一步研究,未来的测量工作中更有可行性的是引入流体力学中计算升力与阻力的方法,通过对惯性张量测量过程中空气阻尼的定量分析来提高惯性张量的测量精度。

参考文献 (References)

- [1] WANG Y H, HAN W, NIU W D, et al. Dynamic modeling, motion analysis and fault diagnosis of underwater gliders with the loss of one wing[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 123: 546-565.
- [2] YOUCEF-TOUMI K, ASADA H. The design and control of manipulators with decoupled and configuration-invariant inertia tensors[C]//1986 American Control Conference, 1986: 811-818.
- [3] GREEN M W. Measurement of the moments of inertia of full scale airplanes[R]. Denton: NACA Technical Notes, 1927: 17-18.
- [4] TURNER H L. Measurement of the moments of inertia of an airplane by a simplified method[R]. Hampton: NTRS, 1950: 31.
- [5] PERRY D H. Measurements of the moments of inertia of the avro 707B aircraft[R]. [S. l.]: ARCMA Current Papers, 1963: 24-26.
- [6] ZHANG X, YU H, TANG W, et al. General mass property measurement equipment for large-sized aircraft[J]. *Sensors*, 2022, 22(10): 3912.
- [7] 鲁四平, 卢志辉, 孙志扬, 等. 导弹弹头质量特性参数测量方法的研究[J]. *机械强度*, 2002, 24(4): 623-625.
LU SiPing, LU ZhiHui, SUN ZhiYang, et al. Research on method for measurement of the parameters about the properties of warhead's mass [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2002, 24(4): 623-625 (In Chinese).

- [8] 王秋晓,王 迎. 飞行器质量特性参数测量[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2011, 34(12): 23-28.
WANG QiuXiao, WANG Ying. A new measurement method for mass property parameters[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2011, 34(12): 23-28(In Chinese).
- [9] KILIÇ B. Design of an inertia measurement device for stores[D]. Middle East Technical University, 2018:47-54.
- [10] 徐 华,刘淑琴,虞 烈. 转动惯量测试台磁悬浮系统电磁阻尼的研究[J]. 西安交通大学学报,2001,35(12): 1288-1291.
XU Hua, LIU ShuQin, YU Lie. Study on electro-magnetic suspend system damping of a test rig for measuring inertia moment[J]. Journal of Xi'an JiaoTong University,2001,35(12): 1288-1291(In Chinese).
- [11] CHEN Y, ZENG Y, LI H, et al. Research on the measurement technology of rotational inertia of rigid body based on the principles of monocular vision and torsion pendulum[J]. Sensors, 2023, 23(10): 4787.
- [12] 穆继亮. 基于阻尼分析的转动惯量测量研究[J]. 中国仪器仪表, 2009(5): 69-71.
MU JiLiang. Measurement of rotational inertia based on damping analysis[J]. China Instrumentation,2009(5): 69-71 (In Chinese).
- [13] 孔 玥. 阻尼条件下转动惯量测量技术的研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2013:8-14.
KONG Yue. Research on measurement technology of moment of inertia under damping condition[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013:8-14(In Chinese).
- [14] 张小明,王德民,李俊烨,等. 基于复摆测量法阻尼对转动惯量的影响分析[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2018, 41(4): 54-59.
ZHANG XinMing, WANG DeMin, LI JunYe, et al. Analysis on the influence of rotational inertia by damping based on compound pendulum measuring method[J]. Journal of Changchun University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2018, 41(4): 54-59 (In Chinese).
- [15] 于治会. 落体法测量转动惯量的问题[J]. 环境技术, 1995, 13(5): 39-43.
YU ZhiHui. Problem of measuring moment of inertia by falling body method[J]. Environmental Technology, 1995, 13(5): 39-43 (In Chinese).
- [16] 刘 丹,侯之超. 三线摆方程简化及其共振问题研究[J]. 振动与冲击, 2007,26(8): 136-139.
LIU Dan, HOU ZhiChao. Simplification of governing equation of trifilar pendulum and its resonance problem[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007,26(8): 136-139 (In Chinese).
- [17] 戚作涛. 复摆的非线性振动[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2000,18(增刊2): 46-48.
QI ZuoTao. Nonlinear vibration of complex pendulum [J]. Journal of Guangxi Normal University(Natural Science Edition), 2000,18(Suppl. 2): 46-48(In Chinese).
- [18] 张教超,郝方楠. 转动惯量测试方法概述[J]. 汽车零部件,2015(10):83-85.
ZHANG JiaoChao, HAO FangNan. The summarization of test methods for rotational inertia[J]. Automobile Parts, 2015(10): 83-85 (In Chinese).
- [19] 王小三,刘云平,倪怀生,等. 转动惯量测量研究的进展及展望[J]. 宇航计测技术,2019, 39(2): 1-5.
WANG XiaoSan, LIU YunPing, NI HuaiSheng, et al. Progress and prospects for the measurement research on the moment of inertia[J]. Journal of Astronautic Metrology and Measurement, 2019, 39(2): 1-5(In Chinese).
- [20] 刘 芳,董效辰,张亚振,等. 基于 AMESim 的汽车动力传动系统扭转振动分析及参数优化[J]. 机械强度,2022,44(3): 509-516.
LIU Fang, DONG XiaoChen, ZHANG YaZhen, et al. Torsional vibration analysis and parameter optimization of automobile power transmission system based on AMESim[J]. Journal of Mechanical Strength, 2022, 44(3): 509-516(In Chinese).
- [21] 宋 斌,莫德强,刘永付,等. 小质量弹丸极转动惯量测试设备设计及其标定方法[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2021, 44(6): 90-95.
SONG Bin, MO DeQiang, LIU YongFu, et al. Design of measuring equipment for small mass projectile pole moment of inertia and analysis of calibration method[J]. Journal of Changchun University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2021, 44(6): 90-95(In Chinese).
- [22] 支余吉. 转动惯量标准件标准值的不确定度研究[D]. 北京:机械科学研究总院, 2017:8-15.
ZHI YuJi. Research on the uncertainty of the standard value of moment of inertia standard parts[D]. Beijing: China Academy of Machinery Science and Technology Group, 2017: 8-15(In Chinese).
- [23] 郭志荣,毛天喜,杨 振. 扭摆法测刚体转动惯量中空气阻尼的数值模拟[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2014, 28(1): 38-40.
GUO ZhiRong, MAO TianXi, YANG Zhen. Numerical simulations of air damping in the measurement of moment of inertia using torsion pendulum method[J]. Journal of Lanzhou University of Arts and Science(Natural Sciences), 2014, 28(1): 38-40 (In Chinese).
- [24] 赵 岩. 扭摆法转动惯量测量中的非线性问题研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013:20-22.
ZHAO Yan. Study on nonlinear problems in measuring moment of inertia by torsion pendulum method[D]. Harbin :Harbin Institute of Technology, 2013:20-22(In Chinese).
- [25] 王成军,尚晨晨,张玉平. 一种非线性超谐波激励器的设计与实验分析[J]. 机械强度, 2022, 44(3): 575-580.
WANG ChengJun, SHANG ChenChen, ZHANG YuPing. Design and experimental analysis of a nonlinear ultraharmonic vibrator exciter [J]. Journal of Mechanical Strength, 2022, 44(3): 575-580 (In Chinese).
- [26] 张晓琳,冯晓媛,于 航,等. 基于 HHT 的转动惯量测量技术研究[J]. 仪器仪表学报,2022,43(6): 38-45.
ZHANG XiaoLin, FENG XiaoYuan, YU Hang, et al. Research on measuring technology of moment of inertia based on HHT [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(6): 38-45(In Chinese).
- [27] 张晓琳,唐 松,王 军,等. 复杂形状物体转动惯量测量技术研究[J]. 航天制造技术, 2011(1): 17-20.
ZHANG XiaoLin, TANG Song, WANG Jun, et al. Research on measuring technology of moment of inertia for objects with complex shape[J]. Aerospace Manufacturing Technology, 2011(1): 17-20 (In Chinese).
- [28] 高 伟,王渊博,赖如辉,等. 切出风速下大型风力机变桨故障叶片气动及结构特性研究[J]. 机械强度, 2023, 45(6): 1361-1370.
GAO Wei, WANG YuanBo, LAI RuHui, et al. Research on aerodynamic and structural characteristics of large-scale wind turbine blade with pitch fault under the cut-off wind speed. [J]. Journal of Mechanical Strength, 2023, 45(6): 1361-1370(In Chinese).
- [29] 郭志荣,马雪勇,杨 振. 扭摆法测刚体转动惯量中空气压强阻尼的屏蔽[J]. 大学物理, 2015, 34(1): 37-40.
GUO ZhiRong, MA XueYong, YANG Zhen. The shield against air damping effecting the measurement of moment of inertia using torsion pendulum method [J]. College Physics, 2015, 34(1): 37-40 (In

- Chinese).
- [30] 郭志荣,殷保祥. 抗空气阻尼扭摆法测刚体转动惯量的实现[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2016, 30(1): 40-42.
GUO ZhiRong, YIN BaoXiang. The realization of anti air damping torsional pendulum measuring the moment of inertia of rigid body[J]. Journal of Lanzhou University of Arts and Science(Natural Sciences), 2016, 30(1): 40-42 (In Chinese).
- [31] 刘 华. 单摆和复摆在不同摆角情形下的特性分析[J]. 科技创业月刊, 2013, 26(2): 139-140.
LIU Hua. Characteristic analysis of simple pendulum and compound pendulum in different angular situation[J]. Pioneering with Science & Technology Monthly, 2013, 26(2): 139-140(In Chinese).
- [32] 张心明,李俊烽. 结构特征量静态参数测试技术[M]. 北京:科学出版社, 2016:141-142.
ZHANG XinMing, LI JunYe. Static parameters of structural characteristic quantity measurement technology[M]. Beijing: Science Press, 2016:141-142(In Chinese).
- [33] THY S, IWAYAMA T. Investigation of pendulum damping using an angle sensor and video analysis: combination of viscous and dry friction[J]. Physics Education, 2022, 57(6): 065026.
- [34] 卢志辉,孙浩智,王 和,等. 三轴转动惯量的直立摆复摆与圆周扭摆协同测量方法[J]. 兵工学报, 2022, 43(7): 1628-1635.
LU ZhiHui, SUN HaoZhi, WANG He, et al. A collaborative method for measuring the triaxial moment of inertia using the vertical vibration compound pendulum and circular torsion pendulum[J]. Acta Armamentarii, 2022, 43(7): 1628-1635(In Chinese).
- [35] 杨洪涛,卢志辉,孙浩智,等. 三轴转动惯量的摆复摆与扭摆法协同测量比例法[J]. 兵工学报, 2023, 44(5): 1513-1520.
YANG HongTao, LU ZhiHui, SUN HaoZhi, et al. Collaborative proportional method for measuring triaxial moment of inertia based on vibration compound pendulum and torsion pendulum[J]. Acta Armamentarii, 2023, 44(5): 1513-1520(In Chinese).
- [36] 徐向辉,陈 平,唐一科,等. 弹箭转动惯量的摆复摆法测量及误差分析[J]. 弹箭与制导学报, 2016, 36(1): 149-153.
XU XiangHui, CHEN Ping, TANG YiKe, et al. The inertia moment of projectile measured by vibration pendulum method and error analysis[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2016, 36(1): 149-153(In Chinese).
- [37] MELNIKOV V G. A new method for inertia tensor and center of gravity identification[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, 63(5/6/7): e1377-e1382.
- [38] DUDARENKO N, MELNIKOV V, MELNIKOV G. A method for inertia tensors and centers of masses identification on symmetric precessions[C]//2014 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). St. Petersburg, Russia. New York: IEEE, 2014: 596-601.
- [39] 王小三,闫 磊,白 天,等. 一种主动控制正弦扭摆法转动惯量测量装置及方法:CN109540382A[P]. 2019-03-29.
WANG XiaoSan, YAN Lei, BAI Tian, et al. An active control sine torsion pendulum method for measuring moment of inertia device and method:CN109540382A[P]. 2019-03-29(In Chinese).
- [40] 吴 斌,赵育善,马彩霞. 用扭摆测试导弹惯性积的方法[J]. 上海航天(中英文), 2000, 17(2): 40-42.
WU Bin, ZHAO YuShan, MA CaiXia. A method for testing missile's product of inertia using torsion pendulum[J]. Aerospace Shanghai(Chinese & English), 2000, 17(2): 40-42 (In Chinese).
- [41] 边志强,唐振刚,栗双岭,等. 航天器转动惯量和惯性积的集成一体化测试方法[J]. 航天制造技术, 2017(6): 16-20.
BIAN ZhiQiang, TANG ZhenGang, LI ShuangLing, et al. Research on integration testing method on rotational inertia and product of inertia for spacecraft[J]. Aerospace Manufacturing Technology, 2017(6): 16-20 (In Chinese).
- [42] 徐 刚. 主惯性轴测量技术研究[D]. 成都:四川大学, 2004:6-7.
XU Gang. Research on measurement technology of main inertial axis[D]. Chengdu:Sichuan University, 2004:6-7(In Chinese).
- [43] 刘家成,葛正浩,李 杰,等. 二级往复小型空压机动平衡优化设计与试验验证[J]. 机械强度, 2023, 45(6): 1445-1451.
LIU JiaCheng, GE ZhengHao, LI Jie, et al. Optimal design of dynamic of two-stage reciprocating small air compressor and coupling vibration test analysis of motor[J]. Journal of Mechanical Strength, 2023, 45(6): 1445-1451(In Chinese).
- [44] 殷健新,勾昱君,贵永亮,等. 高炉煤气余压透平膨胀机转子动力特性[J]. 机械强度, 2023, 45(1): 9-15.
YIN JianXin, GOU YuJun, GUI YongLiang, et al. Dynamical characteristics of blast furnace top gas recovery turbine unit rotor[J]. Journal of Mechanical Strength, 2023, 45(1): 9-15(In Chinese).
- [45] XU Z, ZHAO K, LI X, et al. A high accuracy method for large moments and product of inertia spacecraft[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2019, 1325(1): 012139.
- [46] FAKHARI V, SHOKROLLAHI S. A theoretical and experimental disturbance analysis in a product of inertia measurement system[J]. Measurement, 2017, 107: 142-152.
- [47] 姜孝东. 风阻效应下的组合转子动平衡[J]. 科技创新与应用, 2016(15): 20-21.
JIANG XiaoDong. Dynamic balance of combined rotor under wind resistance effect[J]. Technology Innovation and Application, 2016(15): 20-21(In Chinese).
- [48] BUTSUEN T, OOKUMA M, NAGAMATUS A. Application of direct system identification method for engine rigid body mount system[C]//SAE International Congress and Exposition, 1986: 860551.
- [49] PANDIT S M, HU Z Q. Determination of rigid body characteristics from time domain modal test data[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 177(1): 31-41.
- [50] FREGOLENT A, SESTIERI A. Identification of rigid body inertia properties from experimental data[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1996, 10(6): 697-709.
- [51] NUUTILA O, SAINÉ K, TOLVOLA J. Experimental methods for determining rigid body inertia properties from frequency response function of medium speed diesel engines[J]. Proceedings of SPIE: The International Society for Optical Engineering, 1993: 1121-1125.
- [52] CONTI P, BRETEL J. Mount stiffnesses and inertia properties from modal test data[J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1989, 111(2): 134-138.
- [53] 张 景. 动力学系统建模[M]. 北京:国防工业出版社, 2000:10.
ZHANG Jing. Modeling of dynamical system[M]. Beijing:National Defense Industry Press, 2000:10(In Chinese).
- [54] 张 勇,侯之超. 考虑振型修正的识别惯性参数的一种模态模型方法[J]. 振动工程学报, 2016, 29(3): 436-443.
ZHANG Yong, HOU ZhiChao. Identification of rigid body inertia properties by utilizing modal parameters[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(3): 436-443(In Chinese).
- [55] CHIN A W, HERRERA C Y, SPIVEY N D, et al. Testing and validation of the dynamic inertia measurement method[M]//WICKS A. Shock & Vibration, Aircraft/Aerospace, and Energy Harvesting, Volume 9. Cham: Springer International Publishing, 2015: 81-104.