

M-B 模型弹塑性临界点确定方法^{*}

METHOD FOR DETERMINING THE CRITICAL POINT OF ELASTIC-PLASTIC OF M-B MODEL

曹宏军^{**1} 朱 敏¹ 王盛凹^{***1} 邓李重阳² 马德胜²

(1. 海军工程大学 核科学技术学院, 武汉 430033)

(2. 91515 部队, 三亚 572000)

CAO HongJun¹ ZHU Min¹ WANG ShengAo¹ DENG LiChongYang² MA DeSheng²

(1. College of Nuclear Science and Technology, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

(2. Unit 91515, Sanya 572000, China)

摘要 弹塑性临界点的确定对粗糙表面接触问题的研究至关重要。为了解决现有的 M-B 模型弹塑性临界点确定方法中,表征值不可测且难以应用的缺点,基于分形理论基本模型,运用数理统计得出了微凸体截断面积分布函数及概率分布密度。结合赫兹接触的理想弹、塑性接触模型得出了具有分形特征的平面-平面接触过程中的法向力模型。基于塑性变形时的实际接触面积与截断面积的区别,提出了修正因子,最后得出以临界法向力为表征量的弹塑性临界点确定方法。新方法以法向力为表征量且需通过校准试验得出,更具操作性与可信度。

关键词 M-B 模型 分形理论 弹塑性临界点 截断面积 法向力

中图分类号 O369

Abstract The determination of the elasto-plastic critical point is very important for the study of the rough surface contact problem. In order to solve the shortcomings of the existing M-B model elasto-plastic critical point determination method, the characterization value is unmeasurable and difficult to apply. Based on the basic model of fractal theory, the distribution function and probability distribution density of asperity truncated area were obtained by means of mathematical statistics. Combined with the ideal elastic and plastic contact models of Hertzian contact, the normal force model in the process of plane-plane contact with fractal characteristics was obtained. Based on the difference between the actual contact area and the cut-off area during plastic deformation, a correction factor was proposed, and a method for determining the elasto-plastic critical point with the critical normal force as the characterization quantity was finally obtained. The new method takes the normal force as the characterization quantity and needs to be obtained through calibration experiments, which is more operational and credible.

Key words M-B model; Fractal theory; Elastoplastic critical point; Truncation area; Normal force

Corresponding author: WANG ShengAo, E-mail: wangshengao123@163.com

The project supported by the Equipment Pre-Study Project(No. 41426030107).

Manuscript received 20220725, in revised form 20221031.

0 引言

利用分形理论研究粗糙表面接触问题由来已久。MAJUMDAR A 等^[1] 205-216 早在 1990 年就将分形理论应用到粗糙度表征及表面接触力学中,并且发现当表面处理技术在观测尺度内是各向同性且为随机误差时,由此产生的表面在该尺度范围内符合分形特征;WANG S 等^[2] 提出了更为完善的 M-B 模型,并且研究了具有分形特征的工程表面接触区的温度变化规律;

葛世荣等^[3] 提出了特征粗糙度的概念,并且论述了用分形理论表征表面粗糙度的方法;YAN W 等^[4] 3617-3624 通过分形理论分析得出总接触力,以及实际接触面积分析模型,并为表面形貌参数和材料行为对接触界面弹性和塑性变形演化的影响提供了新的见解;刘绍鹏等^[5] 对螺栓连接界面进行了研究,发现了分形参数与表面粗糙度的关联,并且揭示了螺栓预紧力与连接面实际接触面积的关系;沈健等^[6] 提出了具有单向分形特征的粗糙表面间的接触载荷模型,揭示了在此种状

^{*} 20220725 收到初稿, 20221031 收到修改稿。装备预先研究项目(41426030107)资助。

^{**} 曹宏军, 男, 1993 年生, 甘肃平凉人, 汉族, 海军工程大学硕士研究生, 主要研究方向为金属摩擦学。

^{***} 王盛凹(通信作者), 男, 1994 年生, 山东烟台人, 汉族, 海军工程大学博士研究生, 主要研究方向为金属摩擦学。

况下接触载荷与实际接触面积之间的关系;范立峰等^[7]研究了分形维数和特征尺度参数(葛世荣提出的特征粗糙度)对接界面法向接触刚度的影响。

M-B 模型^{[4]3617-3624}是分形理论研究粗糙表面众多理论中的一种常用模型,认为在平面-平面摩擦接触过程中,接触界面依次发生完全塑性形变和弹塑性形变,具体机制:开始接触时,微凸体顶端最先接触刚性平面,顶端曲率半径较小,故而应力较为集中^[8],发生纯塑性变形;随着平面不断下压,微凸体由于变形、互相融合等,顶端曲率半径不断变大,此时弹性行为的特征不断增强,接触界面处于弹塑性混合接触状态。

在 M-B 模型平面-平面摩擦接触过程中,弹性行为出现的分界点称为弹塑性临界点。现有文献中对 M-B 模型中弹塑性临界点的判断,主要以临界截断面积 s_c 为判断依据。通过确定接触过程中最大截断面积 s_m 与临界截断面积 s_c 的关系来判断弹塑性临界点。当 $s_m \leq s_c$ 时,摩擦副处于纯塑性接触状态;当 $s_m > s_c$ 时,摩擦副处于弹性接触与塑性接触的混合状态。其中临界截断面积 s_c 的确定是关键,确定方法主要源于 MAJUMDAR A 等^{[4]3617-3624[9]}的研究。

以上判断面-面摩擦过程中弹塑性临界点的方法有以下不足:一是判据难以获得及使用。以临界截断面积 s_c 为判断依据,但此参数仅用于理论分析,无法在试验中直观测量,作为临界点判断依据,在实际操作中较难应用。二是临界截断面积 s_c 计算模型存在缺陷。根据材料的屈服曲线可知,在弹性-塑性临界点处,材料中的应力应该连续,但是对于现有方法来说,当截断面积等于临界截断面积 s_c 时,根据赫兹接触理论^{[10]48-50},代入微凸体的理想弹、塑性接触载荷计算模型,所得结果显示材料中的应力在临界点处存在突变,与材料屈服曲线所揭示的应力连续规律相悖,说明现有方法存在缺陷。

本文基于分形理论基本模型,运用数理统计手段得出微凸体截断面积分布函数及概率分布密度。针对以往弹塑性临界点的不足之处进行了改进,提出了新的临界截断面积模型及分形表面接触过程中的法向力模型。考虑到微凸体塑性变形时的实际接触面积与截断面积的区别,在其中引入了修正因子,并据此提出了以临界法向力为表征量的弹塑性临界点确定方法。

1 微凸体截断面积分布模型

分形理论^{[1]205-216}认为,截断面积大于等于 s 的微凸体个数 N 满足:

$$N(s) = \left(\frac{s_m}{s}\right)^{\frac{D-1}{2}} \quad (1)$$

式中, D 为微凸体表面的二维分形维数; s_m 为微凸体

最大截断面积。故而,截断面积为 s_i 的微凸体的个数 $n(s_i)$ 为^{[4]3617-3624}

$$n(s_i) = \frac{D-1}{2s_m} \left(\frac{s_m}{s_i}\right)^{\frac{D-1}{2}} \quad (2)$$

2 实际接触面积

根据 M-B 模型,两接触平面的实际接触面积 S 如下:

当 $s_m \leq s_c$ 时,微凸体为完全塑性接触状态,此时

$$S = \left(\frac{D-1}{3-D}\right)s_m \quad (3)$$

当 $s_m > s_c$ 时,弹性接触和塑性接触同时存在,且

$$S = \frac{D-1}{6-2D} \left[1 + \left(\frac{s_c}{s_m}\right)^{\frac{3-D}{2}}\right]s_m \quad (4)$$

3 弹塑性临界点

3.1 临界截断面积

金属材料的屈服曲线示意图如图 1 所示。

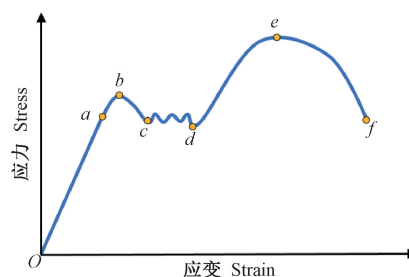


图 1 金属材料屈服曲线

Fig. 1 Yield curve of metal materials

由图 1 可看出,金属材料屈服过程中有 6 个节点,其中, b 、 d 、 e 三点为关键节点,它们将曲线分成 4 段,材料在这 4 个阶段的应力-应变关系不同,一般分别称为弹性阶段、屈服阶段、强化阶段和颈缩阶段^[11]。

由图 1 可得,在弹塑性变形的分界点,也就是屈服点,应力连续。对 M-B 模型来说,在临界截断面积处,接触状态发生了变化,计算方法也发生了变化,但此时应力应连续。

3.1.1 理想塑性接触载荷

根据赫兹接触理论^{[10]46-72},实际接触面积为 S_i 的微凸体的理想塑性接触载荷为

$$P_p(S_i) = HS_i \quad (5)$$

处于塑性接触状态的实际接触面积 S_i 应略大于截断面积 s_i ,两者并不相等^{[4]3617-3624}。故令

$$S_i = as_i \quad (6)$$

式中, a 为修正系数; H 为材料硬度。

此时,微凸体理想塑性接触载荷与截断面积的关系为

$$P_p(s_i) = aHs_i \quad (7) \quad \text{连续,故}$$

3.1.2 理想弹性载荷

根据赫兹接触理论^{[10]46-72},实际接触面积为 S_i 的微凸体的理想弹性接触载荷为

$$P_e(S_i) = \frac{4\sqrt{\pi}E^*G^{D-2}S_i^{\frac{4-D}{2}}}{3} \quad (8)$$

在理想弹性接触状态下,实际接触面积与截断面积之间的关系为^[12]

$$S_i = \frac{1}{2}s_i \quad (9)$$

由此得出,微凸体理想塑性接触载荷与截断面积的关系为

$$P_e(s_i) = \frac{2^{\frac{D}{2}}\sqrt{\pi}E^*G^{D-2}s_i^{\frac{4-D}{2}}}{3} \quad (10)$$

式中, G 为分形粗糙度; E^* 为等效弹性模量。

3.1.3 临界截断面积模型

对某一截断面积等于临界截断面积 s_c 的微凸体来说,其接触模式在此时由理想塑性接触状态转变为理想弹性接触状态。由应力连续理论,其内部应力应

$$P_e(s_c) = P_p(s_c) \quad (11)$$

结合式(7)和式(10),可得

$$s_c = \left(\frac{2^{\frac{D}{2}}\sqrt{\pi}E^*G^{D-2}}{3aH} \right)^{\frac{2}{D-2}} \quad (12)$$

3.2 临界点的确定

当 $s_m \leq s_c$ 时,微凸体为完全塑性接触状态。此时,结合式(2)和式(7),可推出

$$P_{\text{总}} = \int_{s_1}^{s_m} P_p(s_i)n(s_i)ds_i = a\left(\frac{D-1}{3-D}\right)Hs_m \quad (13)$$

此时,结合式(3),可得其摩擦因数^[13]为

$$\mu = \frac{\tau S}{P_{\text{总}}} = \tau \left(\frac{D-1}{3-D} \right) s_m \left/ \left[a \left(\frac{D-1}{3-D} \right) H s_m \right] \right. = \frac{\tau}{aH} \quad (14)$$

式中, τ 为摩擦副两种材料中较软材料的剪切强度。

当 $s_m > s_c$ 时,微凸体为弹塑性混合接触状态。总载荷分为弹性接触载荷与塑性接触载荷。结合式(1)、式(2)、式(7)和式(10)得,微凸体总载荷 $P_{\text{总}}$ 为

$$\begin{aligned} P_{\text{总}} = P_p + P_e &= [N_{\text{总}} - N(s_c)] \int_{s_1}^{s_c} P_p(s_i)n(s_i)ds_i + N(s_c) \int_{s_c}^{s_m} P_e(s_i)n(s_i)ds_i = \\ &= a\left(\frac{D-1}{3-D}\right)H\left(\frac{s_c}{s_m}\right)^{\frac{3-D}{2}}s_m + \frac{2^{\frac{D}{2}}\sqrt{\pi}E^*G^{D-2}(D-1)}{3(5-2D)}s_m^{\frac{D-1}{2}}\left(s_m^{\frac{5-2D}{2}} - s_c^{\frac{5-2D}{2}}\right) = \\ &= p(a, s_m) \end{aligned} \quad (15)$$

在这种情况下,结合式(4),可得接触面摩擦因数为

$$\mu = \frac{\tau S}{P_{\text{总}}} = \frac{\tau}{p(a, s_m)} \frac{D-1}{6-2D} \left[1 + \left(\frac{s_c}{s_m} \right)^{\frac{3-D}{2}} \right] s_m \quad (16)$$

式中,最大修正因子一般为固定值,可以通过试验测定,而最大截断面积 s_m 与法向载荷有关,并随着法向

载荷的增大而增大。由式(14)及式(16)可以看出,在试验对象不变的情况下,摩擦因数与修正因子 a 、最大截断面积 s_m 有关。

以 45 号钢数据为例,说明此模型的变化规律。所有物理量的单位均已转换为国际标准单位,具体数据如表 1 所示。

表 1 示例材料的部分物理量取值

Tab. 1 Values of some physical quantities of example materials

分形维数 Fractal dimension D	分形粗糙度 Fractal roughness G/m	硬度 Hardness H/Pa	等效弹性模量 Equivalent to elasticity modulus E^*/Pa	临界截断面积 Critical truncation area s_c/m^2
2.46	2.00×10^{-9}	2.62×10^8	2.34×10^{11}	4.46×10^{-6}

图 2 为修正因子 a 取 1.0、1.1、1.2 时,摩擦因数与最大截断面积的函数关系图。

由图 2 可知,在最大截断面积从 0 开始逐渐增大的过程中,摩擦因数先是保持恒定,此时摩擦状态为纯塑性接触, $s_m \leq s_c$, 摩擦因数模型对应于式(14);而后在最大截断面积到达临界截断面积后,摩擦转为弹塑性接触状态,摩擦因数模型对应于式(16)。可以看

出,摩擦因数模型在临界截断面积处的变化较为明显,故可据此确定弹塑性临界点。

4 确定弹塑性临界点的方法

4.1 确定修正因子 a

进行校准试验,根据试验结果,判断试验是否处于纯塑性摩擦状态,找出符合式(14)的试验状态,进而

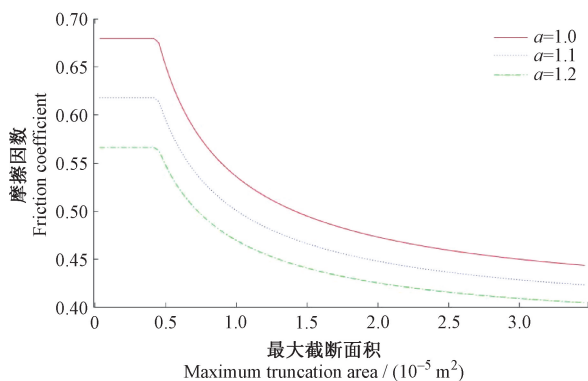


图 2 摩擦因数与最大截断面积关系

Fig. 2 Relation between the friction coefficient and the maximum truncation area

拟合得出 a 。

判断试验是否在纯塑性接触状态的标准如下:

1) 法向载荷从 0 开始的初期。由图 1 及以上分析可知,纯塑性接触发生在摩擦副法向力从 0 开始加载的初始阶段,故而要想判断试验是否处于纯塑性阶段,需控制法向载荷从 0 开始加载。

2) 摩擦因数变化较小相对恒定。由式(14)可知,在试验对象不变的情况下,剪切强度 τ 、材料硬度 H 与修正因子 a 都保持恒定,故此时摩擦因数恒定。实际试验中,随机误差不可避免,故而摩擦因数的试验测量值一般都有波动,具体波动幅度受试验方法及测量设备精度影响。在摩擦因数未发生图 1 中临界点附近的明显变化之前,都可认定其处于纯塑性接触状态。

而后根据试验测得的摩擦因数值,得出修正因子 a 的值,计算式为

$$a = \frac{\tau}{\mu H} \quad (17)$$

4.2 计算临界截断面积 s_c

临界截断面积 s_c 的计算方法为

$$s_c = \left(\frac{2^{\frac{D}{2}} \sqrt{\pi} E^* G^{D-2}}{3aH} \right)^{\frac{2}{D-2}} \quad (18)$$

式中,若摩擦副两部分为不同材料^[14],则

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} - \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (19)$$

$$G = 10^{\frac{5.26}{R_a^{0.042}} - 3} \quad (20)$$

$$D = 1.54R_a^{-0.042} + 1 \quad (21)$$

式中, R_a 为较软材料的表面粗糙度; ν_1 、 ν_2 分别为摩擦副中两种材料的泊松比; E_1 、 E_2 分别为两种材料的弹性模量。

若摩擦副两部分为同种材料,则 R_a 为两者中较大的表面粗糙度的值,且^{[10] 48}

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (22)$$

4.3 确定临界载荷 P_c

临界载荷即为最大截断面积 s_m 等于临界截断面积 s_c 时的法向载荷,此时可认定摩擦副仍处于纯塑性接触状态,结合式(13),可知其计算方法为

$$P_c = a \left(\frac{D - 1}{3 - D} \right) H s_c \quad (23)$$

由此即可确定摩擦试验中的临界载荷 P_c 。

在试验载荷小于此临界载荷时,摩擦副处于完全塑性接触状态;大于此临界载荷时,摩擦副处于弹性接触与塑性接触的混合状态。

5 仿真模拟验证

5.1 建立模型

以分形理论中的 M-B 模型为研究对象,故须先建立一个符合分形特征的粗糙表面。模型表面轮廓曲线方程为

$$z(x) = \sum_{n=0}^6 1.5^{(D-2)n} [1 - \cos(1.5^n x)] \quad (24)$$

然后,根据此表面轮廓曲线建立模型,本次仿真采用 Matlab 进行建模,并将 Python 语言脚本导入 Abaqus 中,进行二次开发,建立完整的微观粗糙表面。完整表面模型如图 3 所示。

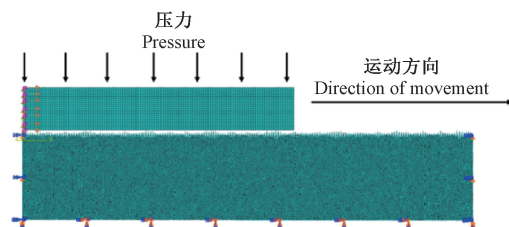


图 3 分形表面模型

Fig. 3 Fractal surface model

模型上滑块的摩擦表面是理想刚性平面,滑动基底为具有分形表面特征的金属材料,其物理参数设置为:弹性模量为 143 000 MPa,泊松比为 0.291,屈服应力为 590 MPa。为使仿真分析更加精密,基底采用三角形网格,滑块则出于运算方便的考虑,采用四边形网格。

5.2 结果分析

设置计算时长为 6 s,运动速度为 1 cm/s,分别取不同法向力及分形维数 D ,计算每种状况下的切向力及摩擦因数。将接触界面的所有切向应力汇总求和,即为滑块所受摩擦力,再除以对应的法向力,即得出其摩擦因数。所有模拟计算的具体结果如表 2 所示,以法向力为横坐标,摩擦因数为纵坐标,可以将表 2 转化为图形,其中的摩擦因数变化率是指当前节点与前一节点之间的斜率,转化后的图形如图 4 所示。

表 2 不同法向力与分形维数时的摩擦因数模拟结果

Tab. 2 Simulation result of the friction coefficient with different normal forces and fractal dimensions

法向载荷 Normal load F_n /N	仿真结果 Simulation results			摩擦因数变化率 Rate of change in coefficient of friction/%			与理论值相对误差 Relative error from theoretical values/%		
	$D=2.3$	$D=2.4$	$D=2.5$	$D=2.3$	$D=2.4$	$D=2.5$	$D=2.3$	$D=2.4$	$D=2.5$
1	0.562	0.620	0.722	—	—	—	-0.76	0.54	6.96
10	0.555	0.619	0.715	-1.19	-0.12	-0.93	-1.94	0.42	5.97
20	0.551	0.616	0.709	-0.84	-0.56	-0.93	-2.77	-0.14	4.98
30	0.549	0.548	0.569	-0.36	-10.98	-19.76	-3.12	-11.10	-15.76
60	0.502	0.490	0.502	-8.55	-10.58	-11.77	0.01	-7.17	-10.28
90	0.460	0.469	0.460	-8.29	-4.41	-8.29	-0.01	-3.89	-9.79
120	0.432	0.459	0.455	-6.20	-1.97	-1.03	-1.45	0.00	-5.14
150	0.429	0.437	0.449	-0.57	-4.98	-1.38	1.14	-1.50	-2.38
180	0.418	0.434	0.448	-2.54	-0.61	-0.20	1.30	0.62	-0.65
210	0.406	0.425	0.446	-2.89	-1.97	-0.47	0.36	0.72	1.06
240	0.399	0.412	0.439	-1.63	-3.21	-1.48	-0.01	-0.90	1.28
270	0.397	0.408	0.437	-0.74	-0.97	-0.67	0.64	-0.72	2.04
300	0.391	0.404	0.430	-1.47	-0.81	-1.56	0.00	-0.56	1.78
360	0.387	0.400	0.427	-0.88	-0.97	-0.57	0.85	0.56	3.01

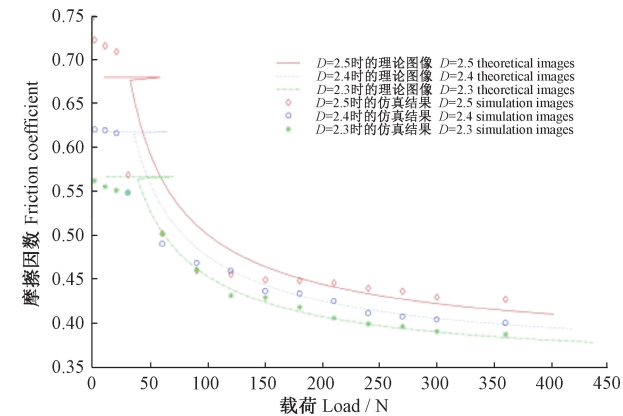


图 4 不同法向力与分形维数时的摩擦因数模拟结果

Fig. 4 Simulation result of the friction coefficient with different normal forces and fractal dimensions

由表 2 可以看出,有限元计算结果与理论模型预测结果摩擦因数在 0~30 N 的小载荷阶段相对误差较大,最大可达 6.96%;在 30~90 N 载荷区间,摩擦因数快速变化,表明此阶段微凸体由纯塑性接触状态转向弹塑性接触状态,相对误差最大,其中最大相对误差出现在 $D=2.5$ 且法向载荷为 30 N 处,为-15.76%;在法向载荷大于 90 N 阶段,有限元计算结果与理论模型预测结果吻合较好,相对误差均保持在 5.14% 以内。总体而言,在弹塑性临界点之后,摩擦因数变化趋势与模型预测一致;在弹塑性临界点之前和弹塑性临界点处,理论模型与仿真结果稍有偏差,但相对误差仍可接受。有限元计算结果与理论模型预测结果大部分数据点的误差小于 10%。

由此可得,此模型对弹塑性临界点的预测是准确的。在弹塑性临界点之后,摩擦因数变化趋势与模型预测完全吻合,而在弹塑性临界点之前的初始部分,虽然不完全吻合,但是差别并不是很大。摩擦因数变化

规律突变的临界点就是弹塑性临界点。

6 结论

通过以上分析推导,本文主要工作可总结如下:

- 1) 提出了更为明确具体的微凸体截断面积分布模型。分析并推进分形接触模型,运用数理统计方法,得到了微凸体截断面积分布函数与概率分布密度。
- 2) 提出了修正因子。考虑了微观接触时,塑性接触面积与理想塑性接触面积不同,由此提出了修正因子并对模型进行修正。
- 3) 提出了新的 M-B 模型弹塑性临界点的确定方法。基于临界点处弹塑性应力连续的原则,提出了新的临界截断面积模型,并提出了新的 M-B 模型弹塑性临界点的确定方法,以临界载荷这一可测量的物理量为临界点表征参数。
- 4) 使用仿真手段对所提模型进行了验证,证明本模型确定 M-B 模型中弹塑性临界点的可行性。

参考文献 (References)

[1] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. Journal of J Tribology, 1990, 112 (2) : 205-216.

[2] WANG S, KOMVOPOULOS K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: Part II—Multiple domains, elastoplastic contacts and applications [J]. Journal of Tribology, 1994, 116 (4) : 824-832.

[3] 葛世荣, TONDER K. 粗糙表面的分形特征与分形表达研究 [J]. 摩擦学学报, 1997, 17 (1) : 73-80.

GE ShiRong, TONDER K. The fractal behavior and fractal characterization of rough surfaces [J]. Tribology, 1997, 17 (1) : 73-80.

[4] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact analysis of elastic-plastic

- fractal surfaces [J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7): 3617-3624.
- [5] 刘绍鹏, 王涛, 李友荣, 等. 螺栓联接界面表面分形及接触研究[J]. 机械设计与制造, 2016(5): 107-110.
LIU ShaoPeng, WANG Tao, LI YouRong, et al. Study on fractal behavior and contact of bolt connected surfaces [J]. Machinery Design & Manufacture, 2016(5): 107-110(In Chinese).
- [6] 沈健, 易利祥, 周丹, 等. 过盈配合单向分形界面微观接触面积研究[J]. 中国机械工程, 2016, 27(19): 2564-2569.
SHEN Jian, YI LiXiang, ZHOU Dan, et al. Study on microscopic contact area in one-dimensional fractal interface of interference fits [J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(19): 2564-2569(In Chinese).
- [7] 范立峰, 赵璐, 聂雯, 等. 界面分形参数对法向接触刚度影响的研究[J]. 工程力学, 2021, 38(7): 207-215.
FAN LiFeng, ZHAO Lu, NIE Wen, et al. Effects of interface fractal parameters on normal contact stiffness [J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(7): 207-215(In Chinese).
- [8] 王立超, 周燕飞. 新型机加工弹簧静压状态下的应力集中研究[J]. 机械强度, 2021, 43(1): 239-243.
WANG LiChao, ZHOU YanFei. Research on stress concentration under static pressure of a new machined spring [J]. Journal of Mechanical Strength, 2021, 43(1): 239-243(In Chinese).
- [9] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.
- [10] 波波夫 V L. 接触力学与摩擦学的原理及其应用 [M]. 2 版. 李强, 雒建斌, 译. 北京: 清华大学出版社, 2011: 46-72, 78-99.
POPOV V L. Contact mechanics and friction: physical principles and applications [M]. LI Qiang, LUO JianBin, Jr. Beijing: Tsinghua University Press, 2011: 46-72, 78-99(In Chinese).
- [11] KUMAR B R. Strength of materials [M]. London: CRC Press, 2022: 12-32.
- [12] 苏蕾, 荆建平. 结合面微观接触面积分布数值仿真分析方法 [J]. 噪声与振动控制, 2019, 39(5): 23-27.
SU Lei, JING JianPing. Analysis of microcosmic contact area distribution based on numerical simulation method [J]. Noise and Vibration Control, 2019, 39(5): 23-27(In Chinese).
- [13] 陈爽, 王勇杰, 李仕华, 等. MoS₂ 薄膜摩擦因数和磨损量的数学模型 [J]. 表面技术, 2022, 51(3): 51-56.
CHEN Shuang, WANG YongJie, LI ShiHua, et al. Mathematical model of friction coefficient and wear of MoS₂ film [J]. Surface Technology, 2022, 51(3): 51-56(In Chinese).
- [14] 王丹. 基于分形理论的结合面接触刚度与摩擦力建模及分析 [D]. 沈阳: 东北大学, 2015: 22-25.
WANG Dan. Study on combined surface contact stiffness and friction modeling and analysis based on fractal contact theory [D]. Shenyang: Northeastern University, 2015: 22-25(In Chinese).