

有界窄带激励下手臂系统主共振分析*

PRIMARY RESONANCE ANALYSIS OF ARM SYSTEM UNDER BOUNDED NARROW-BAND EXCITATION

杨志安**¹ 满志军***² 刘文洋²

(1. 唐山学院 唐山市结构与振动工程重点实验室, 唐山 063000)

(2. 华北理工大学 机械工程学院, 唐山 063210)

YANG ZhiAn¹ MAN ZhiJun² LIU WenYang²

(1. Tangshan Key Laboratory of Structure and Vibration Engineering, Tangshan University, Tangshan 063000, China)

(2. College of Mechanical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan 063210, China)

摘要 应用多尺度法,对随机窄带激励下人体手臂与振动机械耦合系统的第1阶主共振进行分析,建立手臂系统的二自由度非线性动力学方程。依次求解系统第1阶主共振的幅频响应方程和Ito随机微分方程。为研究随机振动下变量的分布规律,使用矩估计法计算第1阶主共振随机均方响应期望和均方值的近似表达式。通过数值分析得到人体手臂系统内参数对主共振的影响。结果表明,第1阶主共振的均方响应曲线与它们的幅频响应曲线结构相近具有拓扑关系,增大外激励的幅值主共振振幅的均方值和共振区域均增大,而系统阻尼的增大则会使均方值和共振区域减小。非线性刚度系数的改变对系统影响很小。

关键词 手臂系统 非线性 主共振 多尺度法 窄带激励

中图分类号 O324

Abstract By using multi-scales method, the first primary resonance of the human arm and vibration mechanical coupling system under random narrow-band excitation was analyzed, and the two-degree-of-freedom nonlinear dynamic equation of the arm system was established. The first primary resonance amplitude frequency response equation and Ito stochastic differential equation of the system were solved in turn. In order to study the distribution law of variables under random vibration, the approximate expressions of the expectation and mean square value of the first primary resonance random mean square response were calculated using the moment estimation method. The influence of the parameters of the human arm system on the primary resonance was obtained through numerical analysis. The results show that the mean square response curves of the first primary resonance have the same topological structure as their amplitude-frequency response curves, and the mean square value of the primary resonance amplitudes and the resonance region increase with the increase of the amplitude of the external excitation, while the increase of the system damping will reduce the mean square value and the resonance region. The change of nonlinear stiffness coefficient has little effect on the system.

Key words Arm system; Nonlinear; Primary resonance; Multi-scales method; Narrow-band excitation

Corresponding author: MAN ZhiJun, E-mail: 908763169@qq.com, Tel: +86-315-2792277

Manuscript received 20221016, in revised form 20221105.

0 引言

随着社会生产的不断发展,涌现了多种不同的机械工具(如电钻、砂轮机、气锤等),提高了工人的生产效率、方便了人们的生活,但它们不可避免地会有振动和噪声的产生。这些振动工具通过手柄或扶手把振动

传递给人体手臂系统的过程统称为手传振动^[1]。长期接触手传振动可能会引发多种类型的疾病(如雷诺氏病^[2]),并伴有相关症状(如血液供应不足,神经、肌腱和手臂系统肌肉受损等)。曹阳等^[3]研究了井窑孔制作机的关键部件沿手臂振动的传递特性,发现手臂系统对振动能量的吸收与耗散和所受激励的频率有

* 20221016 收到初稿, 20221105 收到修改稿。

** 杨志安, 男, 1963 年生, 河北秦皇岛人, 汉族, 唐山学院教授, 硕士研究生导师, 博士, 主要研究方向为力学与非线性动力学。

*** 满志军 (通信作者), 男, 1998 年生, 河北沧州人, 汉族, 华北理工大学硕士研究生, 主要研究方向为机械动力学。

关。DONG R G 等^[4]建立了人体手臂系统与振动工具的线性耦合模型,对振动吸收功率进行分析发现不同频率状态下吸收功率并不相同,有必要对幅频响应特性进行进一步研究。李健^[5]将人体手臂系统等效为弹簧-阻尼-质量块模型并对机械阻抗进行计算,与实验数据对比发现,机械阻抗并不符合线性特征。孟和等^{[6]98}对手臂系统的生物力学特性进行了研究发现,人体肌肉等软组织的应力-应变曲线接近三次方曲线的规律,表明对手臂系统的幅频响应分析应充分考虑非线性的影响。杨志安等^[7]为研究人体手部的振动响应特性,建立了单自由度非线性动力学方程,运用多尺度法^[8]求解了系统在简谐激励下的主共振。由于振动机械作为激励源仅用简谐激励代替可能并不准确,所以为研究有界窄带随机激励对人体手臂的影响,本文建立了人体手臂系统的二自由度非线性动力学模型,应用多尺度法计算了第1阶主共振的幅频响应方程和随机均方响应的近似表达式。使用 Runge-Kutta 法^[9]仿真计算得到系统的时间历程曲线和相图。

1 人体手臂系统非线性动力学方程

人体手臂是由骨骼、肌肉、组织、组成的,其中骨骼与肌肉的占比最多,且每种成分的刚度和阻尼并不相同具有复杂的生物力学特性。本文从机械动力学角度出发,为研究手臂系统的振动特性,将其等效模化为由骨骼和肌肉构成的二自由度质量-弹簧-阻尼系统(图1)。由文献^{[6]98}可知,骨骼的非线性特性较弱对手臂系统建模影响不大,而肌肉组织的非线性特性很强对系统的响应影响很大,且应力应变曲线接近三次方曲线的规律,因此模型应该有立方和平方非线性刚度。

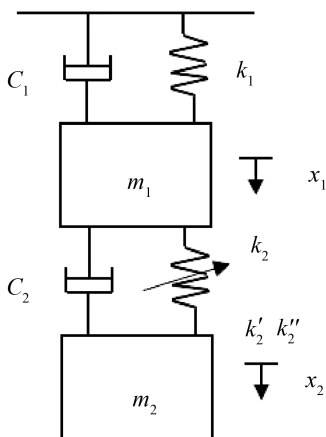


图1 手臂系统模型

Fig.1 Arm system model

根据牛顿第二定律得到系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 + \\ k_2'(x_1 - x_2)^3 + k_2''(x_1 - x_2)^2 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 - \\ k_2'(x_1 - x_2)^3 - k_2''(x_1 - x_2)^2 = f(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中, m_1 为手臂系统骨骼质量; m_2 为肌肉组织的质量; k_1 和 c_1 分别为骨骼与人体之间关节链接键的刚度和阻尼; k_2 和 c_2 分别为骨骼与肌肉组织间的刚度和阻尼; k_2' 和 k_2'' 分别为肌肉组织的非线性刚度系数; $f(t)$ 为骨骼系统和肌肉组织受到的窄带随机激励,一个窄带随机过程^[10]的谱密度函数只在一个很小的频带内有较大的值且带宽要比整个过程的中心频率小,与简谐激励不同它的激励频率是不断变化的,且功率谱密度函数具有尖峰特点^[11]。由于振动工具的振动频率都有一定的带宽,且大多数能量都集中在中心频率范围内,所以引入窄带随机激励作为振动源有实际意义,其中,

$$f(t) = f \cos[\Omega t + \gamma W(t)]$$

式中, $f > 0$ 为激励的幅值; Ω 为随机激励的中心频率; $W(t)$ 为一标准的维纳过程; $\gamma \geq 0$ 为随机激励的带宽,本文主要研究 $\gamma \ll 1$ 时的情形。将式(1)进一步化简得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = -\alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2 + \gamma_1 x_2 - \eta_1 x_1^3 + 3\eta_1 x_1^2 x_2 - \\ 3\eta_1 x_1 x_2^2 + \eta_1 x_2^3 - \eta_2 x_1^2 + 2\eta_2 x_1 x_2 - \eta_2 x_2^2 + \\ \frac{f \cos[\Omega t + \gamma W(t)]}{m_1} \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \alpha_3 \dot{x}_1 - \alpha_3 \dot{x}_2 + \gamma_2 x_1 + \eta_3 x_1^3 - 3\eta_3 x_1^2 x_2 + \\ 3\eta_3 x_1 x_2^2 - \eta_3 x_2^3 + \eta_4 x_1^2 - 2\eta_4 x_1 x_2 + \eta_4 x_2^2 + \\ \frac{f \cos[\Omega t + \gamma W(t)]}{m_2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } \omega_1^2 &= \frac{k_1 + k_2}{m_1}; \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}; \alpha_1 = \frac{c_1 + c_2}{m_1}; \alpha_2 = \frac{c_2}{m_1}; \\ \alpha_3 &= \frac{c_2}{m_2}; \gamma_1 = \frac{k_2}{m_1}; \gamma_2 = \frac{k_2}{m_2}; \eta_1 = \frac{k_2'}{m_1}; \eta_2 = \frac{k_2''}{m_1}; \eta_3 = \frac{k_2'}{m_2}; \\ \eta_4 &= \frac{k_2''}{m_2} \end{aligned}$$

2 窄带激励下第1阶主共振理论分析

采用多尺度法对骨骼系统的主共振进行分析,多尺度法多用于求解确定性振动的问题中,后来逐渐推广到窄带随机激励下的振动求解。当外界激励的频率接近第1阶系统的固有频率时会导致第1阶主共振的产生,即使是很小的激励幅值也能引起强烈的共振。根据人体仿生学^[12]和生物力学理论^{[6]98}的研究发现,

人体手臂系统符合弱非线性系统的运动规律,因此在阻尼项、惯性项、外激励、非线性项前冠以小参数 ε , 并使用多尺度法对弱非线性系统进行求解。故当 $\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1$ 时,引入小参数 ε 和调谐量 σ_1 仅对骨骼系统的主共振进行非线性分析,且暂不考虑耦合系统中内共振的影响。本文研究 $0 \leq \gamma \ll 1$ 的情况,将式(2)中的第一个公式写成

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \varepsilon \left\{ \alpha_2 \dot{x}_2 - \alpha_1 \dot{x}_1 - \eta_1 x_1^3 + 3\eta_1 x_1^2 x_2 - 3\eta_1 x_1 x_2^2 + \eta_1 x_2^3 - \eta_2 x_1^2 + 2\eta_2 x_1 x_2 - \eta_2 x_2^2 + \frac{f \cos[\Omega t + \gamma W(t)]}{m_1} \right\} + \gamma_1 x_2 \quad (3)$$

采用 T_0, T_1 两个时间尺度,设式(3)的解为

$$x_1(t, \varepsilon) = x_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{12}(T_0, T_1) \quad (4)$$

$$x_2(t, \varepsilon) = x_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{22}(T_0, T_1) \quad (5)$$

式中, $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon T_0$ 。记导数算子为 $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}$, $D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$ 。

将式(4)、式(5)代入式(3),对比 ε 零次幂和一次幂的系数,得到一组线性偏微分方程为

$$D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = 0 \quad (6)$$

$$D_0^2 x_{12} + \omega_1^2 x_{12} = -2D_0 D_1 x_{11} + \alpha_2 D_0 x_{21} - \alpha_1 D_0 x_{11} + \gamma_1 x_{21} - \eta_1 x_{11}^3 + 3\eta_1 x_{11}^2 x_{21} - 3\eta_1 x_{11} x_{21}^2 + \eta_1 x_{21}^3 - \eta_2 x_{11}^2 + 2\eta_2 x_{11} x_{21} - \eta_2 x_{21}^2 + \frac{f \cos[\Omega t + \gamma W(t)]}{m_1} \quad (7)$$

式(6)的解为

$$x_{11} = A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_1 T_0} \quad (8)$$

其中,

$$A_1 = \frac{a_1(T_1)}{2} e^{i\beta_1(T_1)}, \bar{A}_1 = \frac{a_1(T_1)}{2} e^{-i\beta_1(T_1)} \quad (9)$$

式中, a_1 为第 1 阶模态振幅; β_1 为对应的初相位。将式(9)代入式(8),可得消除久期项的条件为

$$-(2i\omega_1 D_1 A_1 + \alpha_1 i\omega_1 A_1 + 3\eta_1 A_1^2 \bar{A}_1) + \frac{f}{2m_1} e^{i[\sigma_1 T_1 + \gamma W(T_1)]} = 0 \quad (10)$$

把式(9)代入式(10)并分离实部和虚部得

$$\begin{cases} D_1 a_1 = -\frac{\alpha_1 a_1}{2} + \frac{f}{2m_1 \omega_1} \sin \varphi_1 \\ a_1 D_1 \varphi_1 = \sigma_1 a_1 - \frac{3\eta_1 a_1^3}{8\omega_1} + \frac{f}{2m_1 \omega_1} \cos \varphi_1 + a_1 \gamma W'(T_1) \end{cases} \quad (11)$$

式中, $\varphi_1 = \sigma_1 T_1 + \gamma W(T_1) - \beta_1$ 。

先考虑 $\gamma = 0$ 时的情况,此时式(11)变为确定性系统,即

$$\begin{cases} D_1 a_1 = -\frac{\alpha_1 a_1}{2} + \frac{f}{2m_1 \omega_1} \sin \varphi_1 \\ a_1 D_1 \varphi_1 = \sigma_1 a_1 - \frac{3\eta_1 a_1^3}{8\omega_1} + \frac{f}{2m_1 \omega_1} \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (12)$$

为了求解手臂系统的稳态振动,假定 $D_1 a_1 = 0$, $D_1 \varphi_1 = 0$, 可以得到稳态系统的幅频响应方程为

$$\left(-\frac{\alpha_1 a_1}{2}\right)^2 + \left(\sigma_1 a_1 - \frac{3\eta_1 a_1^3}{8\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{f}{2m_1 \omega_1}\right)^2 \quad (13)$$

由式(13)可知,在合理的范围内,幅频响应方程的解可能有多个,但并不全为稳态解。为讨论解的稳定性,将式(12)线性化,形成关于振幅和相位扰动量 $\Delta a_1, \Delta \varphi_1$ 的自治微分方程,即

$$\begin{cases} D_1 \Delta a_1 = -\frac{\alpha_1}{2} \Delta a_1 + \frac{f}{2m_1 \omega_1} \cos \varphi_1 \Delta \varphi_1 \\ D_1 \Delta \varphi_1 = -\frac{3\eta_1}{4\omega_1} a_1 \Delta a_1 - \frac{f}{2m_1 \omega_1 a_1^2} \cos \varphi_1 \Delta a_1 - \frac{f}{2m_1 \omega_1 a_1} \sin \varphi_1 \Delta \varphi_1 \end{cases} \quad (14)$$

消去式(14)中的 φ_1 , 得到特征方程:

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} - \lambda_1 & -a_1 \left(\sigma_1 - \frac{3\eta_1}{8\omega_1} a_1^2 \right) \\ \frac{1}{a_1} \left(\sigma_1 - \frac{3\eta_1 a_1}{4\omega_1} - \frac{3\eta_1 a_1}{8\omega_1} \right) & -\frac{\alpha_1}{2} - \lambda_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

将式(15)展成行列式后,根据 Routh-Hurwitz 判据可得出稳态解稳定的充要条件:

$$\frac{\alpha_1^2}{4} + \left(\sigma_1 - \frac{3\eta_1}{8\omega_1} a_1^2 \right) \left(\sigma_1 - \frac{3\eta_1 a_1^2}{4\omega_1} - \frac{3\eta_1 a_1^2}{8\omega_1} \right) > 0 \quad (16)$$

当 $\gamma \neq 0$ 时,由于激励是有界窄带,所以 $\gamma \ll 1$, 故设式(11)的解为

$$a_1 = a_0 + a_3, \varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_3 \quad (17)$$

式中, a_0, φ_0 可由式(12)的解确定; a_3, φ_3 为摄动项。将式(17)代入式(11)中不计关于 a_3, φ_3 的高阶项,便得到式(11)在点 (a_0, φ_0) 的线性方程:

$$\begin{cases} a_3' = -\frac{\alpha_1}{2} \Delta a_1 + \left(\frac{3\eta_1 a_0^3}{8\omega_1} - \sigma_1 a_0 \right) \Delta \varphi_1 \\ \varphi_3' = -\left(\frac{9\eta_1 a_0}{8\omega_1} - \frac{\sigma_1}{a_0} \right) \Delta a_1 - \frac{\alpha_1}{2} \Delta \varphi_1 + \gamma W' \end{cases} \quad (18)$$

式(18)可写成对应的 Ito 微分方程:

$$\begin{cases} da_3 = \left[-\frac{\alpha_1}{2} \Delta a_1 + \left(\frac{3\eta_1 a_0^3}{8\omega_1} - \sigma_1 a_0 \right) \Delta \varphi_1 \right] dT_1 \\ d\varphi_3 = \left[-\left(\frac{9\eta_1 a_0}{8\omega_1} - \frac{\sigma_1}{a_0} \right) \Delta a_1 - \frac{\alpha_1}{2} \Delta \varphi_1 \right] dT_1 + \gamma dW \end{cases} \quad (19)$$

可根据矩法^[13]求解方程的 1 阶稳态矩, 对式 (19) 取数学期望得

$$Ea_3 = E\varphi_3 = 0 \quad (20)$$

由 Ito 微分法则可求出式 (19) 的均方值 Ea_3^2 、 $Ea_3\varphi_3$ 、 $E\varphi_3^2$, 将式 (19) 写成如下形式:

$$\begin{cases} da_3 = [-Q_1a_3 - Q_2\varphi_3]dT_1 \\ d\varphi_3 = [Q_3a_3 - Q_1\varphi_3]dT_1 + \gamma dW \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{式中, } Q_1 = \frac{\alpha_1}{2}; Q_2 = \sigma_1 a_0 - \frac{3\eta_1 a_0^3}{8\omega_1}; Q_3 = \frac{\sigma_1}{a_0} - \frac{9\eta_1 a_0}{8\omega_1}。$$

由 Ito 微分法则可得

$$\begin{cases} da_3^2 = (-2Q_1a_3^2 - 2Q_2\varphi_3a_3 + 0)dT_1 \\ da_3\varphi_3 = (Q_3a_3^2 - 2Q_1a_3\varphi_3 - Q_2\varphi_3^2)dT_1 + a_3\gamma dW \\ d\varphi_3^2 = (0 + 2Q_3a_3\varphi_3 - 2Q_1\varphi_3^2)dT_1 + 2\gamma\varphi_3dW + \gamma^2dT_1 \end{cases} \quad (22)$$

式 (22) 两边取期望由 Ito 微分法则, 可知

$$\frac{dEa_3^2}{dT_1} = \frac{dEa_3\varphi_3}{dT_1} = \frac{dE\varphi_3^2}{dT_1} = 0, E(\gamma^2) \approx 0 \quad (23)$$

$$E(a_3\gamma W') = E(\gamma\varphi_3 W') = 0 \quad (24)$$

则式 (22) 可转化为

$$\begin{cases} -2Q_1Ea_3^2 - 2Q_2Ea_3\varphi_3 + 0 = 0 \\ Q_3Ea_3^2 - 2Q_1Ea_3\varphi_3 - Q_2E\varphi_3^2 = 0 \\ 0 + 2Q_3Ea_3\varphi_3 - 2Q_1E\varphi_3^2 + \gamma^2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

由式 (25) 的系数矩阵可得

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2Q_1 & 2Q_2 & 0 \\ -Q_3 & \lambda + 2Q_1 & Q_2 \\ 0 & -2Q_3 & \lambda + 2Q_1 \end{vmatrix} \quad (26)$$

式 (26) 的特征方程为

$$\lambda^3 + 6Q_1\lambda^2 + (12Q_1^2 + 4Q_2Q_3)\lambda + 8Q_1^3 + 8Q_1Q_2Q_3 \quad (27)$$

由式 (27) 可知

$$\begin{cases} 6Q_1 > 0 \\ 12Q_1^2 + 4Q_2Q_3 > 0 \\ Q_1^3 + Q_1Q_2Q_3 > 0 \end{cases} \quad (28)$$

式 (29) 为 2 阶矩存在的充要条件, 可由式 (17)、式 (20) 求得, 通过和确定性周期激励下求得的解的稳定条件对比发现, 两者是一致的。

$$\begin{cases} Ea_1 = a_0 \\ Ea_1^2 = a_0^2 + \frac{Q_2^2\gamma^2}{4Q_1^3 + 4Q_1Q_2Q_3} \\ E\varphi_1 = \varphi_0 \\ E\varphi_1^2 = \varphi_0^2 + \frac{(2Q_1^2 + Q_2Q_3)\gamma^2}{4Q_1^3 + 4Q_1Q_2Q_3} \end{cases} \quad (29)$$

式中, a_0 的值与 Ea_1^2 的值是相互对应的, 由式 (22) 可

依次求得 Ea_3^2 、 $Ea_3\varphi_3$ 、 $E\varphi_3^2$ 的值:

$$\begin{cases} Ea_3^2 = \frac{Q_2^2\gamma^2}{4Q_1^3 + 4Q_1Q_2Q_3} \\ Ea_3\varphi_3 = \frac{Q_2^2\gamma^2}{4Q_1^3 + 4Q_2Q_3} \\ E\varphi_3^2 = \frac{(2Q_1^2 + Q_2Q_3)\gamma^2}{4Q_1^3 + 4Q_1Q_2Q_3} \end{cases} \quad (30)$$

3 数值分析

为了定量求解, 根据 KAMALAKAR G B 等^[14] 在研究中得出的人体手臂系统各物理参数, 给各参数赋值为 $m_1 = 0.6 \text{ kg}$, $m_2 = 0.31 \text{ kg}$, $k_1 = 17431 \text{ N/m}$, $k_2 = 7977 \text{ N/m}$, $k'_2 = 1743.1 \text{ N/m}$, $k''_2 = 871.5 \text{ N/m}$, $c_1 = 182 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $c_2 = 43 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, $f = 25 \text{ N}$, $\varepsilon = 0.001$, $\gamma = 0.1$ 。

根据式 (15) 和式 (29) 分别计算系统的主共振幅频响应曲线和均方响应曲线。

图 2 所示为 $\gamma = 0$ 时手臂与振动机械耦合系统中第 1 阶主共振的幅频响应曲线。图 3~图 7 所示为主共振的均方响应曲线, 与图 2 对比发现, 它们具有相同的拓扑结构, 且以上各图并没有明显的“跳跃现象”说明骨骼系统为弱非线性系统。图 4 所示为手臂系统第 1 阶主共振随外激励力幅值 f 变化时的均方响应曲线, 当 f 的值增大时第 1 阶主共振的共振区域和均方值均增大, 且均方值在峰值处的变化较为明显。图 5 和图 6 所示为手臂系统第 1 阶主共振随阻尼 c_1 和 c_2 变化的均方响应曲线。由图 5、图 6 可知, 随着 c_1 和 c_2 的增加, 第 1 阶主共振的均方值和共振区域均减小。骨骼系统与肌肉组织之间的阻尼, 对系统主共振影响很大。图 7 所示为非线性刚度系数变化时第 1 阶主共振的均方响应曲线。由图 7 可知, 非线性刚度的增加并不会对均方值和共振区域的大小造成影响, 且均方响应曲线仅产生轻微偏移并未出现“跳跃现象”。这说明非线性刚度系数, 对骨骼系统的非线性特性影响很小。图 8~图 11 所示为使用 4 阶 Runge-Kutta 法仿真计算得到的时间历程曲线和相图, 图 8、图 9、图 12 所示为 $\gamma = 0$ 时确定性振动系统下的情况。由图 8、图 9、图 12 可知, 在前 50 s 内系统的位移随着时间的进行逐渐增大, 但增量越来越小。在 50~100 s 内系统的位移逐步趋于稳定。这与阻尼系统在简谐激励下得出的振动结论一样。图 10、图 11、图 13 所示为 $\gamma = 0.1$ 时系统的时间历程曲线和相图。由图 10、图 11、图 13 可知, 系统位移的变化趋势与 $\gamma = 0$ 时类似, 但由于随机激励的作用, 系统第 1 阶主共振位移趋于稳定后会在某一固定值附近做无规律变化。这说明由于随机扰动的存

在,系统的响应从一周解变为在周期解附近变化的近似解。图 12 和图 13 分别对应 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 0.1$ 时中心激励频率附近手臂系统第 1 阶主共振的拟周期运动。由图 12、图 13 可知,系统第 1 阶主共振位移和速度随时间变化而逐渐增大形成一个极限环,由内到外逐渐增厚变密,说明速度变化较快,且随着 γ 的增大极限环的厚度将增大。

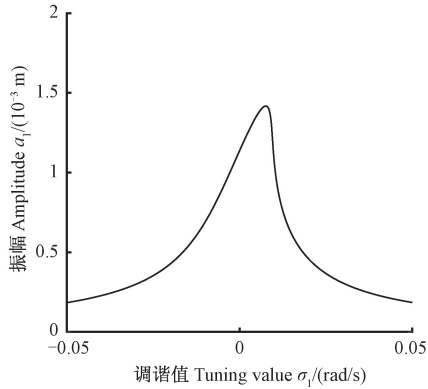


图 2 幅频响应曲线

Fig. 2 Amplitude frequency response curve

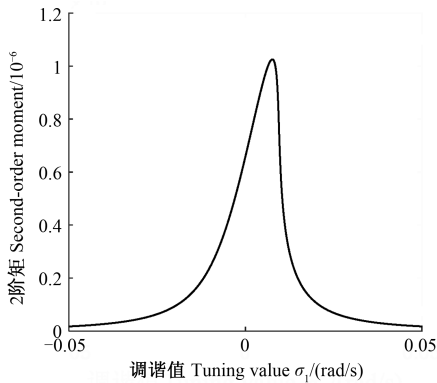


图 3 均方响应曲线(1)

Fig. 3 Curve of the mean square response (1)

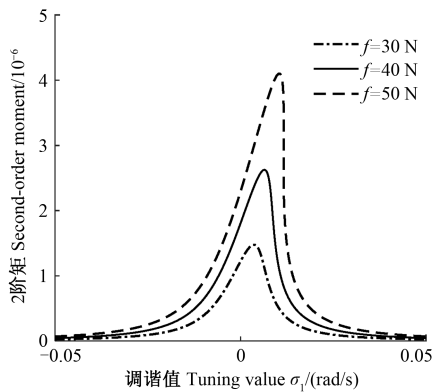


图 4 均方响应曲线(2)

Fig. 4 Curve of the mean square response (2)

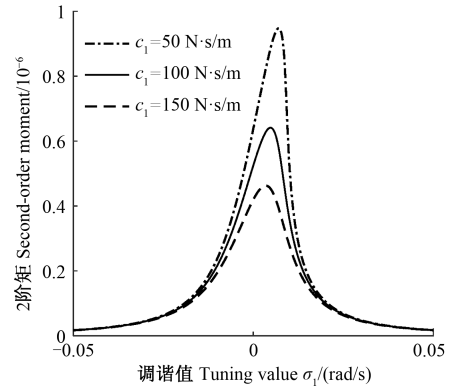


图 5 均方响应曲线(3)

Fig. 5 Curve of the mean square response (3)

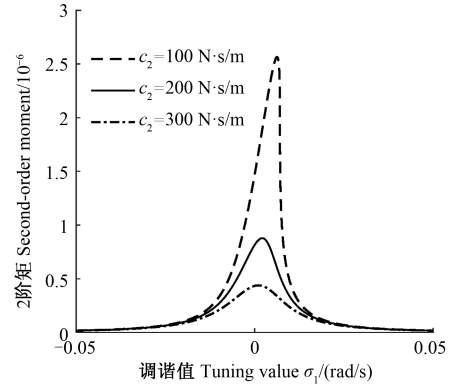


图 6 均方响应曲线(4)

Fig. 6 Curve of the mean square response (4)

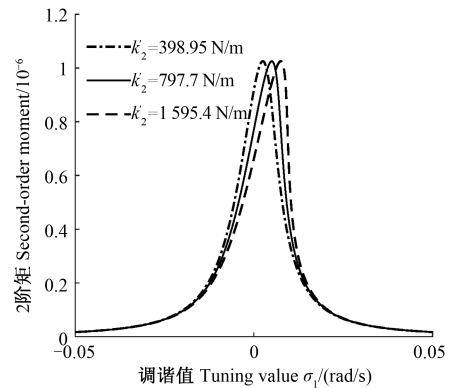


图 7 均方响应曲线(5)

Fig. 7 Curve of the mean square response (5)

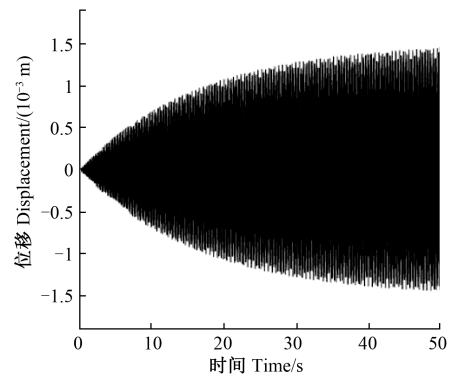


图 8 时间历程曲线(1)

Fig. 8 Time history curve (1)

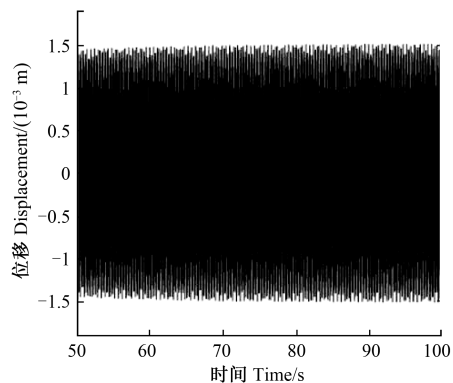


图9 时间历程曲线(2)
Fig. 9 Time history curve(2)

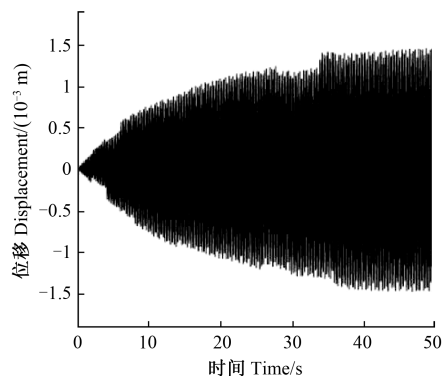


图10 时间历程曲线(3)
Fig. 10 Time history curve(3)

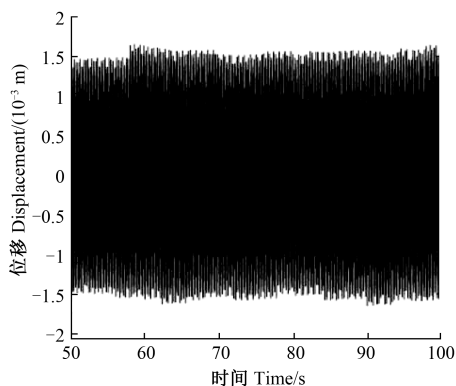


图11 时间历程曲线(4)
Fig. 11 Time history curve(4)

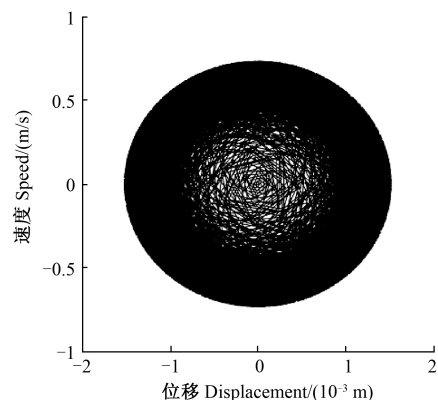


图12 相图(1)
Fig. 12 Phase plot(1)

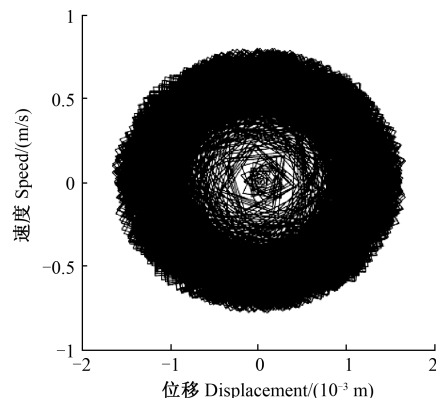


图13 相图(2)
Fig. 13 Phase plot(2)

4 结论

通过以上分析研究,得出如下结论:

1)应用非线性多尺度法研究人体手臂系统在窄带随机激励下的响应,得到了第1阶主共振幅频响应方程和系统随机均方响应的近似表达式。

2)研究了随机项对手臂系统响应的影响,通过数值计算得出第1阶主共振的均方响应曲线与它们的幅频响应曲线有相同的拓扑结构,且手臂系统第1阶主共振2阶矩存在的充要条件,与确定性周期激励下解的稳定条件是一致的。

3)系统内参数发生改变,系统的均方值和共振区域也会发生变化。外激励的幅值以及骨骼系统与肌肉组织之间的阻尼对系统的主共振影响很大,阻尼会导致振动能量的耗散,能量耗散到手臂肌肉组织中经过长期积累,会导致振动病的产生。

4)为预防振动病的发生,在工作中应尽量选择精度高的低振工具或使振动源的频率尽量避开手臂系统的敏感频率。

参考文献 (References)

- [1] LAWS, JERRY. The hazards of HAVS [J]. Occupational Health & Safety, 1998, 67(12): 45.
- [2] KUCUK H O, EYUBOGLU M, KUCUK U, et al. Occupational exposure to hand-arm vibration [J]. International Journal of Cardiology, 2016, 203: 959.
- [3] 曹 阳, 马雄位, 张永江, 等. 井窖孔制作机关键部件振动及其沿手臂传递特性研究[J]. 中国农机化学报, 2020, 41(2): 46-53.
CAO Yang, MA XiongWei, ZHANG YongJiang, et al. Study on vibration of key components of well-cellar making machine and its transfer characteristics along arms [J]. Journal of Chinese Agricultural Mechanization, 2020, 41(2): 46-53 (In Chinese).
- [4] DONG R G, DONG J H, WU J Z, et al. Modeling of biodynamic responses distributed at the fingers and the palm of the human hand-arm system [J]. Journal of Biomechanics, 2007, 40(10): 2335-

- 2340.
- [5] 李 健. 局部振动对人体手臂的影响[D]. 长春:长春工业大学, 2010: 56.
- LI Jian. Influence of local vibration on human arm[D]. Changchun: Changchun University of Technology, 2010: 56 (In Chinese).
- [6] 孟 和, 顾志华. 骨伤科生物力学[M]. 北京:人民卫生出版社, 1991: 98.
- MENG He, GU ZhiHua. Biomechanics of orthopedics and traumatology[M]. Beijing: People's Medical Publishing House, 1991: 98 (In Chinese).
- [7] 杨志安, 王思奇, 李高峰. 手持振动机械与手臂耦合系统主共振研究[J]. 唐山学院学报, 2021, 34(3): 1-5.
- YANG ZhiAn, WANG SiQi, LI GaoFeng. Research on the primary resonance of the hand-held vibrating machine and the arm coupling system[J]. Journal of Tangshan University, 2021, 34 (3): 1-5 (In Chinese).
- [8] NAYFEH C, MOOK D. Nonlinear oscillations in physical systems [M]. Nonlinear Oscillations, 1987: 128.
- [9] 李庆扬. 数值计算原理[M]. 北京:清华大学出版社, 2000: 56.
- LI QingYang. Principle of numerical calculation [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000: 56(In Chinese).
- [10] BENASCIUTTI D, MARQUES J M E. Variance of fatigue damage in narrowband Gaussian random loadings: exact solution and approximations [J]. International Journal of Fatigue, 2021, 151: 106366.
- [11] JAVORSKYJ I, YUZEFOVYCH R, KURAPOV P. Model of multicomponent narrow-band periodical non-stationary random signal [J]. Information Extraction and Processing, 2020, 2020 (48): 17-24.
- [12] ABDELSABOUR F M. A computational model for nonlinear biomechanics problems of FGA biological soft tissues [J]. Applied Sciences, 2022, 12(14): 71-74.
- [13] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京:科学出版社, 1992: 145.
- ZHU WeiQiu. Random vibration [M]. Beijing: Science Press, 1992: 145 (In Chinese).
- [14] KAMALAKAR G B, MITRA A C. Development and analysis of human hand-arm system model for anti-vibration isolators [J]. Materials Today: Proceedings, 2018,5(2): 3943-3952.