

基于灰色预测理论的加速试验数据可靠性评估模型*

RELIABILITY EVALUATION ON ACCELERATED TEST DATA BY USING GREY PREDICTION THEORY

蒋玉婷** 程世娟*** 殷泽凯

(西南交通大学 数学学院统计系, 成都 611756)

JIANG YuTing CHENG ShiJuan YIN ZeKai

(Department of Statistics, College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

摘要 对失效数据量小、加速模型难以确定的情况,传统模型很难对试验结果做出较为准确的评估。基于灰色预测理论对服从 Weibull 分布的恒加速寿命试验数据进行了分析,采用与应力有关的权重生成背景值补充缺失数据,建立等间距灰色预测模型,从而对加速寿命预测模型参数进行了修正。算例分析表明:灰色预测理论对加速试验数据评估模型得到的结果相对误差较小,有较高的预测精度。

关键词 灰色预测 加速寿命试验 Weibull 分布 可靠性评估

中图分类号 O213.2 TB114.3

Abstract At the case where the amount of failure data is small and the acceleration model is difficult to be determined, it is difficult for the traditional model to make a more accurate assessment of the testing results. Based on the grey prediction theory, the constant-experience data of life-obeying Weibull distribution was analyzed. The stress-related weights were used to generate background values to complement the missing data, and an equally spaced gray prediction model was established to correct the parameters of the accelerated life prediction model in this work. The analysis of the example indicated that the gray acceleration testing data evaluation model had a small relative error and high prediction accuracy.

Key words Grey prediction; Accelerated life test; Weibull distributing; Reliability evaluation

Corresponding author: CHENG ShiJuan, E-mail: csj3202@163.com, Fax: +86-28-66367964

The project supported by the Education of Humanities and Social Science Research on Youth Fund (No.20XJAZH009), and the Sichuan Education Department Oil and Gas Department (No.SKB13-08).

Manuscript received 20190919, in revised form 20191010.

引言

随着科学技术的进步,要快速地评估高可靠性、长寿命产品在实际贮存环境中的可靠性水平,加速寿命试验的数据分析与评估技术是有效的手段之一^[1]-13]。目前,国内外通常采用自然环境贮存试验和加速贮存寿命试验两种思路来评估产品的实际寿命。自然贮存试验周期长、数据少、评估偏差大,加速贮存试验可很大程度上缩短试验时间,且能获得相对较多的样本数据,是目前高可靠性产品贮存寿命评估方法的重要技术手段。加速寿命试验分为恒加、步加和序加试验等方法。在这几种加速寿命试验中,恒加试验的理论方

法较为成熟,评估结果精度相对较高。但由于在航空、航天、军工等领域的高可靠性产品价格昂贵且长寿命,所以即使是加速寿命试验所得到的失效或退化数据也相对较少甚至稀缺。1982年邓聚龙教授创立的灰色系统理论^[2],通过对“部分”已知信息的挖掘,提取有价值的信息,实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控^[3]。其中GM(1,1)系列模型是灰色预测理论的基本模型,其研究与应用十分广泛,一直受到国内外关注^[4-7]。钱毅^[8]采用传统均值生成背景值的灰色预测模型对加速寿命试验数据进行了预测,但构造精确度更高的背景值对于模型的预测更有意义。

本文利用灰色预测理论对 Weibull 分布场合下的

* 20190919 收到初稿, 20191010 收到修改稿。教育部人文社会科学研究规划基金项目(20XJAZH009), 四川省教育厅油气科项目(SKB13-08)资助。

** 蒋玉婷, 女, 1995年7月生, 汉族, 四川省成都市人。西南交通大学在读硕士研究生。研究方向为应用统计、可靠性理论与工程。

*** 程世娟, 女, 1973年5月生, 汉族, 山东省临沂市沂水县人。西南交通大学副教授, 硕士生导师, 博士。研究方向为应用统计、可靠性理论与工程、计算智能。

恒加试验数据进行评估,利用等维灰数递补模型建模得到预测值,采用最小二乘法对特征寿命与应力水平的关系进行分析,得到了经灰色预测的加速模型参数,再用该加速模型对常应力下的寿命进行估计,并检验精度。

1 灰色预测模型 GM(1,1)

设原始寿命数据为 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 其中, $x^{(0)}(k) \geq 0 (k=1, 2, \dots, n)$ 。对其进行一次累加生成得到新序列 $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, 其中, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) (k=1, 2, \dots, n)$ 。设 $Z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(k))$, 其中, $z^{(1)}(k) = [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]/2 (k=2, 3, \dots, n)$, 称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (1)$$

为 GM(1,1) 模型, 其中 $-a$ 为发展灰数, b 为灰色作用量。其白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (2)$$

当 $t=1$ 时, 取 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$, 得式(2)的解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (3)$$

得到时间响应式

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k+1) &= \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = \\ &= (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})(1 - e^{-a})e^{-ak} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, a 和 b 可由原始数据根据式(1)通过最小二乘法得到。

2 加速贮存试验数据的统计处理

2.1 基本假设

加速贮存试验选定产品在 k 个应力水平 $T_i (i=0, 1, \dots, k)$ 下进行定数截尾试验, 且 $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k$, 其中 T_0 为正常应力水平。应力水平 T_i 下的样本量与失效数分别为 n_i 和 r_i , 寿命数据为 $x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(r_i)$ 且 $x_i(1) \leq x_i(2) \leq \dots \leq x_i(r_i)$ 。

产品寿命满足假设: 各个应力水平下试样的寿命相互独立, 服从 Weibull(m_i, η_i) 分布, 且试样失效机理不变, 即 $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_k \triangleq m$ 。

以温度为加速应力的加速寿命试验中, 加速模型一般用 Arrhenius 模型^{[1]197-207}, 该模型为

$$\ln \eta_i = \alpha + \beta \varphi(T_i) \quad (5)$$

其中, α, β 是待定参数, 应力水平 T_i 为绝对温度时, $\varphi(T_i) = 1/T_i$ 。

2.2 Weibull 场合下基于 GM(1,1) 模型的加速寿命预测

用序列 $X_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(r_i))$ 表示应力水平 T_i 下的 r_i 个寿命数据, 即应力水平 T_i 下产品的平均寿命为 $\bar{x}_i^{(0)} = \frac{1}{r_i}(x_i^{(0)}(1) + x_i^{(0)}(2) + \dots +$

$x_i^{(0)}(r_i))$ 。对 $\bar{x}_i^{(0)}$ 取对数, 把 T_i 下产品寿命分布 Weibull(m_i, η_i) 化成极值分布 $G(\mu_i, \sigma_i)$, 其中, $\mu_i = \ln \eta_i, \sigma_i = 1/m_i$ 。将每一个应力下的对数平均寿命 $\ln \bar{x}_i^{(0)}$ 作为一个数据列, 其中, $\ln \bar{x}^{(0)} = (\ln \bar{x}^{(0)}(1), \ln \bar{x}^{(0)}(2), \dots, \ln \bar{x}^{(0)}(k))$ 。为后面计算方便, 仍将该数据列记为 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(k))$, 其一次累加生成序列为 $X^{(1)}$ 。假设存在 $\delta \in [0, 1]$, 使得 $z^{(1)}(k)$ 满足 $z^{(1)}(k) = \delta x^{(1)}(k-1) + (1-\delta)x^{(1)}(k)$, $Z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(k))$ 。采用几何方法确定权重, 将式(2)在 $[k-1, k]$ 上积分可得到 $z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt$ 。

由式(3)设方程解的形式为 $x^{(1)}(k) = ue^{-a(k-1)} + v$, 得到

$$z^{(1)}(k) = \frac{u}{e^{a(k-2)}} \left(\frac{1-\delta+\delta e^a}{e^a} \right) + v \quad (6)$$

又

$$z^{(1)}(k) = \frac{u}{e^{a(k-2)}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{ae^a} \right) + v \quad (7)$$

由式(6)、式(7)相等可得

$$\delta = \frac{1}{a} - \frac{1}{e^a - 1}$$

得到方程

$$x^{(0)}(k) + a^* x^{(1)}(k) = b^* \quad (8)$$

其中, $a^* = a/(1-a\delta), b^* = b/(1-a\delta)$ 由最小二乘法估计。根据参数之间的关系, 可得到

$$\begin{cases} a = \ln(\hat{a}^* + 1) \\ b = \frac{\hat{b}^* \ln(\hat{a}^* + 1)}{\hat{a}^*} \\ \delta = \frac{1}{\ln(\hat{a}^* + 1)} - \frac{1}{\hat{a}^*} \end{cases}$$

由原始寿命 $X^{(0)}$, 得到相应的预测模型模拟序列 $\hat{X}^{(0)}$, 其残差序列为

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)} &= (\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(n)) = \\ &= (x^{(0)}(1) - \hat{x}^{(0)}(1), x^{(0)}(2) - \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \\ &= x^{(0)}(n) - \hat{x}^{(0)}(n)) \end{aligned}$$

相对误差序列为

$$\Delta = \left(\left| \frac{\varepsilon(1)}{x^{(0)}(1)} \right|, \left| \frac{\varepsilon(2)}{x^{(0)}(2)} \right|, \dots, \left| \frac{\varepsilon(n)}{x^{(0)}(n)} \right| \right) = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$$

且

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k), S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(0)}(k) - \bar{x})^2,$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon(k), S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon})^2,$$

分别为 $X^{(0)}$ 与 $\varepsilon^{(0)}$ 的均值和方差。

模型模拟精度的检验通过对残差的考察来判断, 均方差比值 $C = S_2/S_1$, 对于给定的 $C_0 > 0, C < C_0$ 和小误差概率 $p = P(|\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}| < 0.6745S_1)$ 对于给定的 $p_0 > 0, p > p_0$ 时的精度等级如表 1 所示。

表 1 精度检验等级参照表

Tab.1 Accuracy inspection level reference table

精度等级 Accuracy level	指标临界值 Critical value	相对误差 Relative error α	关联度 Correlation ε_0	均方差比值 Mean variance ratio C_0	小误差概率 Little error probability p_0
一级 Level 1		0.01	0.90	0.35	0.95
二级 Level 2		0.05	0.80	0.50	0.80
三级 Level 3		0.10	0.70	0.65	0.70
四级 Level 4		0.20	0.60	0.80	0.60

3 算例分析

由统计资料查得某型号电容器的寿命服从 Weibull 分布, 为验证灰色预测模型得到的加速数据是否与现场数据统计性相容, 分别用传统加速模型和本文的灰色加速模型估计该电容器在正常温度水平 $T_0 = 50^\circ\text{C}$ 下的可靠性指标。选定四个加速温度, 实验的相关数据如表 2。

表 2 实验数据

Tab.2 The experimental data

温度 Temperature/ $^\circ\text{C}$	75	125	150	175
样本量 Sample size	60	60	20	20
失效数 Failure number	26	33	12	14

3.1 利用传统加速模型计算

根据查表[9]及文献[1]²⁰⁷⁻²¹⁶ 计算可得参数的简单线性无偏估计如表 3 所示。由于假定 $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_k = m$, 由 Lagrange 乘子法, 在所有的 $\hat{\sigma}_i$ 的线性组合类中找一个方差最小的无偏估计, 作为 σ 的估计, 由此可得到 $\hat{m} = 1/\hat{\sigma}$, 但 $\hat{m}$ 不是无偏估计, 得到 m 的近似无偏估计为 $\tilde{m} = 1.0605$ 。可得加速模型(5)中 α, β 的估计值 $\hat{\alpha} = -12.2458, \hat{\beta} = 7.459$ 。

表 3 简单线性无偏估计

Tab.3 Simple linear unbiased estimation

	$\hat{\mu}_i$	$\hat{\sigma}_i$
T_1	8.620 4	0.778 8
T_2	6.485 5	1.113 5
T_3	5.210 8	0.882 5
T_4	4.525 9	0.862 6

由此得到正常温度水平 $T_0 = 50^\circ\text{C}$ (绝对温度为

323 K) 下的可靠性指标

$$\hat{\mu}_0 = 10.8471, \hat{\eta}_0 = 51400$$

3.2 利用灰色预测模型计算

由于应力水平分别为 $75^\circ\text{C}, 125^\circ\text{C}, 150^\circ\text{C}, 175^\circ\text{C}$, 为了建立等间距灰色模型, 改进 GM(1, 1) 模型中紧邻序列生成方式得到权重 $\delta = 0.5282$, 由权重决定背景值来生成 $T = 100^\circ\text{C}$ 下的预测数据, 将扩充得到的 5 个温度下的平均寿命对数值作为新的原始数据列 $X^{(0)}$ 建立灰色预测模型。得到发展灰数 $-a = 0.1815$ 和灰色作用量 $b = 3.3395$, 时间响应式的离散解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \ln E^{(1)}(k+1) = 22.1555e^{0.1794k} - 18.3964$$

得到估计生成序列 $\ln E^{(0)}$ 如图 1。均方差比值 $c = 0.0052 < 0.35$ 和小概率误差 $p = 1 > 0.95$ 查表 1 都为一级精度, 故预测序列精度符合要求。预测序列的散点图如图 2 所示。

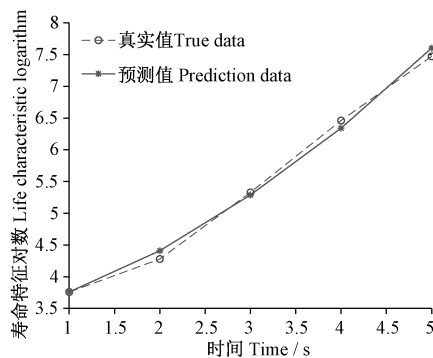


图 1 预测数据与真实数据

Fig.1 Prediction data and true data

将预测值与温度利用 Matlab 软件对它们之间的线性关系进行回归分析, 拟合效果如图 3 所示, 回归方程中参数 $\hat{\alpha}' = -11.1867, \hat{\beta}' = 6587.2794$ 。

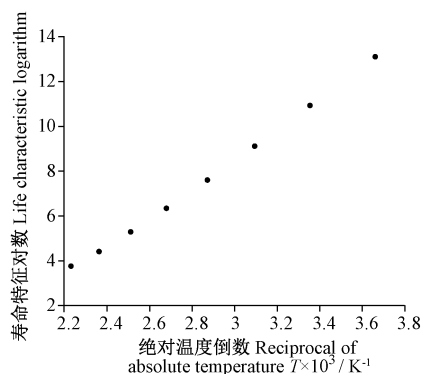


图2 预测值散点图

Fig.2 Scatter predictive value

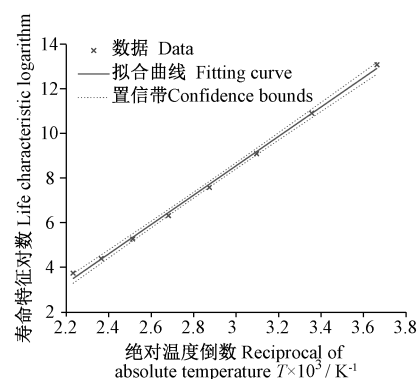


图3 寿命函数与温度函数线性关系

Fig.3 Linear relationship between characteristic life and absolute temperature

此时可得到灰色预测的加速方程,由此估计正常应力水平下的平均寿命为 $\hat{E}'(T) = 55\ 843.926\ 1$ 。

利用等间距灰色预测模型和加速模型相结合建模,最后得到常应力水平的预测值,预测误差明显减小,如表4所示相对误差为0.34%,分析其主要原因:根据灰色预测模型得出由与应力水平相关的权重生成背景值,估计出100℃下的特征寿命,对原始数据序列进行扩充,再次建立模型,调整模型并提高了精度,使得预测相对误差减小。

表4 误差检验表

Tab.4 Error check table

序号 Serial number	残差 Residual $\varepsilon(k)$	平均相对误差 Average relative error Δ
2	-0.131 8	-0.003 4
3	0.041 1	
4	0.120 8	
5	-0.129 8	

4 结论

本文针对在加速贮存试验中,加速模型难确定的问题,基于灰色系统理论进行加速贮存试验可靠性评估方法研究。以灰色预测模型为背景,结合 Arrhenius

加速模型兼具二者特点,能准确的对失效样本缺失数据做出预测,与已有方法相比,本文采用的模型数据模拟预测精度更高。本文在可靠性评估过程中数据服从 Weibull 分布,对于小样本下设备的可靠性评估采用本文所研究的模型精度更高。

参考文献 (References)

- [1] 赵宇. 可靠性数据分析[M]. 北京:国防工业出版社, 2011: 1-13; 2011: 197-270; 2011: 207-216.
ZHAO Yu. Data analysis of reliability [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011: 1-13; 2011: 197-270; 2011: 207-216 (In Chinese).
- [2] 邓聚龙. 灰色控制系统[J]. 华中工学院学报, 1982(3): 11-20.
DENG JuLong. The grey control system [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 1982 (3): 11-20 (In Chinese).
- [3] LIU A, ZENG B, LIU J, et al. Four basic model of GM(1,1) and their suitable sequences[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2015, 5(2): 141-156.
- [4] 李翠凤, 戴文战. 非等间距 GM(1,1) 模型背景值构造方法及应用[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2007(增刊2): 1729-1732.
LI CuiFeng, DAI WenZhan. Determinator of the background level in the non-equidistant GM(1,1) model [J]. Journal of Tsinghua University (Sci & Tech), 2007(Suppl2): 1729-1732 (In Chinese).
- [5] ZHENG X W. Models derived from GM(1,1) power model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(11): 2894-2902.
- [6] ZHANG W, XIAO R, SHI B, et al. Forecasting slope deformation field using correlated grey model updated with time correction factor and background value optimization[J]. Engineering Geology, 2019 (260): 1-13.
- [7] 彭振斌, 张闯, 彭文祥, 等. GM(1,1) 模型背景值构造的不同方法与应用[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2017, 38(6): 869-873.
PENG ZhenBin, ZHANG Chuang, PENG WenXiang, et al. Different structure methods and application of background value in GM(1,1) model [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science Edition), 2017, 38(6): 869-873 (In Chinese).
- [8] 钱毅. 灰色预测理论在 Weibull 分布下数据评估中的应用[C]. 全国机械行业可靠性技术学术交流暨第四届可靠性工程分会第二次全体委员大会, 2010: 66-68.
QIAN Yi. Application of grey prediction theory in data evaluation under Weibull distribution [C]. National Machinery Industry Reliability Technology Academic Exchange Conference and the 4th Reliability Engineering Branch Second Committee Meeting Proceedings, 2010: 66-68 (In Chinese).
- [9] 中国电子技术标准化研究所. 可靠性试验用表(增订本)[M]. 北京:国防工业出版社, 1987: 261-263; 1987: 267-268; 1987: 298-299.
China electronics standardization institute reliability test table (Extended revision) [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1987: 261-263; 1987: 267-268; 1987: 298-299 (In Chinese).