

环形极板机电耦合强非线性系统主共振-1/2 亚谐参数共振*

PRIMARY RESONANCE-1/2 SUBHARMONIC PARAMETRIC RESONANCE OF ANNULAR PLATE ELECTROMECHANICAL COUPLING STRONG NONLINEAR SYSTEM

杨志安**¹ 李 熙***²

(1. 唐山学院 唐山市结构与振动工程重点实验室, 唐山 063000)

(2. 河北联合大学 机械工程学院, 唐山 063009)

YANG ZhiAn¹ LI Xi²

(1. Key Laboratory of Structure and Vibration of Tangshan College, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

(2. College of Mechanical Engineering, Hebei United University, Tangshan 063009, China)

摘要 研究环形极板机电耦合系统的强非线性问题。按照弹性力学理论建立环形极板机电耦合系统的动力学方程,利用 Galerkin 方法将其转化为非线性振动方程。转化后的振动方程是杜芬-马修方程,有两个外激频率。应用改进多尺度法求得系统的主共振-1/2 亚谐参数共振的幅频响应曲线,分析了不同的系统参数对共振的影响。

关键词 环形极板机电耦合系统 改进多尺度法 强非线性 简谐激励 主共振-1/2 亚谐参数共振

中图分类号 O322

Abstract In order to study primary resonance-1/2 subharmonic parametric resonance of annular plate electromechanical coupling strong nonlinear system by applying elastic theory, the nonlinear dynamical equation of the system is established. Nonlinear oscillation equation is obtained based on the Galerkin's method. It is Duffing-Mathieu equation with two external excitation frequencies. By means of modified method of multiple scales the approximation solutions of primary resonance-1/2 subharmonic parametric resonance of the system are acquired. Numerical analysis of the influence of different parameter is carried out.

Key words Annular plate electromechanical coupling system; Modified method of multiple scales; Strong nonlinear; Harmonic excitation; Primary resonance-1/2 subharmonic parametric resonance

Corresponding author: YANG ZhiAn, E-mail: yangzhi_an@163.com, Fax: +86-335-2792278

The project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province (No. A2009000997).

Manuscript received 20131112, in revised form 20140323

引言

机电耦合系统广泛存在于工农业生产和科学技术领域,在国民经济发展中占有重要的地位^[1]。关于微电子机械系统的研究已经有许多成果。文献[2]研究了电容器和弹簧串联时极板的振动;文献[3]用拉格朗日方程研究 RLC 电路的暂态过程;文献[4]采用多尺度法研究了共振微梁在电场中的非线性响应问题,并建立了微梁在静电驱动下的模型;文献[5]研究了微悬臂梁受温度影响时的动力学现象;文献[6]研究了具有 spurious energisation 特征电路的非线性振动;文献[7-9]研究了 RLC 电路弹簧耦合系统的非线性振

动,得到了受简谐激励的 Mathieu 方程的级数形式解,并用数值解法验证级数形式解的正确性。文献[10]应用 Lagrange-Maxwell 方程建立受简谐激励的具有电阻和电感非线性 RLC 电路的数学模型,根据多尺度法得到系统满足主共振条件的一次近似解及对应的定常解。文献[11]⁷²¹⁻⁷²⁶[12]⁸⁰⁻⁸⁵以 RLC 串联电路与微梁耦合系统为例,应用 Lagrange-Maxwell 方程建立静电驱动微梁的耦合数学模型。分析了吸合电压和电震荡两种动力学问题。继而又研究了 RLC 串联电路与微梁耦合系统 1:2 型内共振问题。

关于微梁机电耦合系统,学者们已经做了大量的研究。环形板在工程中有广泛的应用,在一些空间立

* 20131112 收到初稿,20140323 收到修改稿。河北省自然科学基金(A2009000997)资助。

**杨志安,男,1963年11月生,河北秦皇岛人,博士,教授,从事机电耦联非线性动力学研究。

***李 熙(通信作者),男,1987年6月生,河北石家庄人,硕士生,从事机械动力学研究。

体结构、电子元器件、和旋转机械等都可以看到环形板的存在。关于环形板的研究已经有一些成果。文献[13]首次尝试解决圆环平面振动的问题,推到了环形薄板在自由边界条件下的运动方程和通解。文献[14]利用矩阵的传递公式计算了环形板不同边界条件下在平面内振动的固有频率,但是不同边界条件对应的振型没有给出。文献[15]提出了环形板平面振动分析一般化的公式,对于圆盘和圆环都适用,作者还通过试验对分析结果进行了验证。将环形板应用到机电耦合系统中有一定的优点。在机电耦合系统中环形薄板内外边缘都可以固定,相对于微梁和圆薄板具有稳定性好,可操作性高等优点。对于环形极板机电耦合系统,报道的文章不多,还未见研究环形极板强非线性系统主共振-1/2 亚谐参数共振问题的文献报道。本文研究环形极板机电耦合强非线性系统的主共振-1/2 亚谐参数共振问题。

1 环形极板机电耦合系统基本方程

如图1所示,环形电容器在电路中的模型。在轴对称情况下,考虑圆环的内半径为 r_1 ,外半径为 r_2 ,厚度为 h ,阻尼系数为 c ,面密度为 ρ ,该圆环有横向均匀分布的对称载荷电磁力 F 。由 F 激起的轴对称振动模式,其基本方程为动力学冯·卡门偏微分方程,即

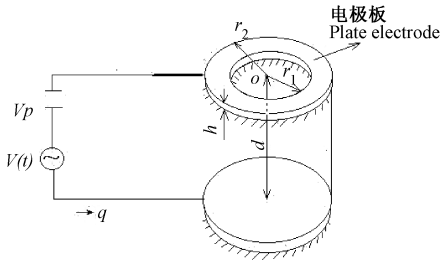


图1 静电驱动环形极板耦合模型

Fig. 1 Model of coupled annular plate actuated by an electric load

$$D \nabla^4 W(\xi, t) + r_2^4 \rho W_{,tt}(\xi, t) + r_2^4 c W_{,t}(\xi, t) - \frac{h}{\xi} (\varphi_{,\xi}(\xi, t) W_{,\xi}(\xi, t))_{,\xi} - r_2^4 F = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 \varphi(\xi, t) + \frac{E}{\xi} W_{,\xi}(\xi, t) W_{,\xi\xi}(\xi, t) = 0 \quad (2)$$

式中, $W(\xi, t)$ —挠度函数; $\varphi(\xi, t)$ —应力函数; γ —泊松比; E —弹性模量; D —弯曲刚度, $D = \frac{Eh}{12(1-\gamma^2)}$;

∇ —微分算子, $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$; $W_{,\xi}(\xi, t) = \frac{\partial W}{\partial \xi}$; $W_{,\xi\xi}(\xi, t) = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$;

$t) = \frac{\partial W}{\partial \xi}$; ξ —任意参数, $0.41 = r_1/r_2 \leq \xi = r/r_2 \leq 1$, ($r_1 \leq r \leq r_2$); F —电磁力, $F = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi (r_2 - r_1) (v_p + v(t))^2}{2(d-w)}$ 。

电容器的环形极板,假定内外边缘为固定加紧。即边界条件为

$$\begin{cases} W(\xi, t) = 0 \\ W_{,\xi}(\xi, t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

应用伽辽金法求解非线性振动控制方程,将挠度函数进行时间与空间的分离,即设定环形极板的瞬间挠度为

$$W(\xi, t) = hx(t)w(\xi) \quad (4)$$

式中, h 为环形电容器极板的厚度, $x(t)$ 是关于时间 t 的无量纲函数,由振动控制方程给出。在轴对称横向均匀载荷电磁力 F 的激励下,设 $w(\xi)$ 为无量纲的偶数项幂函数,即

$$w(\xi) = c_0 + c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4 + c_6 \xi^6 + \xi^8 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),在进行求导运算得

$$\begin{cases} W(\xi, t) = hx(t)(c_0 + c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4 + c_6 \xi^6 + \xi^8) \\ W_{,\xi}(\xi, t) = hx(t)(2c_2 \xi + 4c_4 \xi^3 + 6c_6 \xi^5 + 8\xi^7) \\ W_{,\xi\xi}(\xi, t) = hx(t)(2c_2 + 12c_4 \xi^2 + 30c_6 \xi^4 + 56\xi^6) \end{cases} \quad (6)$$

由环形极板边缘固定夹紧的边界条件得

$$\begin{cases} W(\xi, t)|_{\xi=1} = hx(t)(c_0 + c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4 + c_6 \xi^6 + \xi^8)|_{\xi=1} = 0 \\ W_{,\xi}(\xi, t)|_{\xi=1} = hx(t)(2c_2 \xi + 4c_4 \xi^3 + 6c_6 \xi^5 + 8\xi^7)|_{\xi=1} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中的环形极板厚度 h 与关于时间的 $x(t)$ 均为无量纲函数,两者都不能恒为零,在极板外边缘固定时,即在 $\xi=1$ 时有

$$\begin{cases} c_0 + c_2 + c_4 + c_6 + 1 = 0 \\ 2c_2 + 4c_4 + 6c_6 + 8 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

同理考虑环形极板内边缘固定($\xi=0.41$)时边界条件

$$\begin{cases} c_0 + 0.41^2 c_2 + 0.41^4 c_4 + 0.41^6 c_6 + 0.41^8 = 0 \\ 2 \times 0.41 c_2 + 4 \times 0.41^3 c_4 + 6 \times 0.41^5 c_6 + 8 \times 0.41^7 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

联立式(8)和式(9)解得

$$c_0 = 0.028 \ 3; c_2 = -0.392 \ 7; c_4 = 1.700 \ 7; c_6 = -2.336 \ 2。$$

将 c_0, c_2, c_4, c_6 的值代入式(2)整理可得

$$\begin{aligned} \xi^4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi^4} + 2\xi^3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} + \xi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \xi^4 E h^2 x^2(t) \times \\ [4c_2^2 + 32c_2 c_4 \xi^2 + (72c_2 c_6 + 48c_4^2) \xi^4 + \\ (128c_2 + 192c_4 c_6) \xi^6 + (320c_4 + 180c_6^2) \xi^8 + 576c_6 \xi^{10} + 448\xi^{12}] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

解上式可得

$$\varphi(\xi, t) = -Eh^2 x^2(t) \left(\frac{c_2^2}{21} \xi^4 + \frac{16}{315} c_2 c_4 \xi^6 + \right.$$

$$\frac{6c_4^2 + 9c_2c_6\xi^8}{301} + \frac{64c_2 + 96c_4c_6\xi^{10}}{3\ 285} + \frac{80c_4 + 45c_6^2\xi^{12}}{3\ 663} + \frac{288c_6\xi^{14}}{14\ 287} + \frac{28}{3165}\xi^{16} \quad (11)$$

将式(4)、式(5)和式(11)代入式(1)得

$$Dh\dot{x}(t)A + r_2^4\phi\ddot{x}(t)W(\xi) + r_2^4ch\dot{x}W(\xi) + Eh^4x^3(t)B - r_2^4F = 0 \quad (12)$$

式中,

$$A = \frac{2c_2}{\xi^2} + 84c_4 + 630c_6\xi^2 + 2\ 408\xi^4$$

$$B = \left(\frac{12c_2^2}{21}\xi^2 + \frac{32c_4}{21}\xi^4 + \frac{336c_4^2 + 504c_2c_6\xi^6}{301} + \frac{128c_2 + 192c_4c_6\xi^8}{73} + \frac{3\ 520c_4 + 1\ 980c_6^2\xi^{10}}{1\ 221} + \frac{7\ 488c_6\xi^{12} + 448}{2\ 041}\xi^{14} \right) (2c_2 + 4c_4\xi^2 + 6c_6\xi^4 + 8\xi^6) + \left(\frac{4c_2^2}{21}\xi^2 + \frac{32c_4}{105}\xi^4 + \frac{48c_4^2 + 72c_2c_6\xi^6}{301} + \frac{128c_2 + 192c_4c_6\xi^8}{657} + \frac{320c_4 + 180c_6^2\xi^{10}}{1\ 221} + \frac{576c_6\xi^{12} + 448}{3\ 165}\xi^{14} \right) (2c_2 + 12c_4\xi^2 + 30c_6\xi^4 + 56\xi^6)$$

应用伽辽金法消除残余值得

$$\int_{0.41}^1 [r_2^4\phi\ddot{x}(t)W(\xi) + r_2^4ch\dot{x}W(\xi) + DhAx(t) + Eh^4x^3(t)B - r_2^4F]w(\xi)d\xi = 0 \quad (13)$$

计算上式可得

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{\rho}\dot{x}(t) + 5\ 966.4\frac{D}{\rho r_2^4}x(t) + 0.052\ 7\frac{Eh^3}{\rho r_2^4}x^3(t) = \frac{44.3\varepsilon_0\varepsilon_r\pi(r_2 - r_1)(v_p + v(t))^2}{2\rho h(d - 0.027\ 4hx(t))^2} \quad (14)$$

等式(14)右端的交变电压为: $v(t) = v_0\sin\omega_1t$ (式中 v_0 —交变电压的幅值, ω_1 —交变电压的频率),则有

$$(v_p + v(t))^2 = -\frac{v_0^2}{2}\cos 2\omega_1t + 2v_pv_0\sin\omega_1t + v_p^2 + \frac{v_0^2}{2} \quad (15)$$

式中的 v_p^2 和 $v_0^2/2$ 只影响环形极板的静平衡位置,因此取前两项进行计算即可。令 $\phi(t) = 0.027\ 4hx(t)/d$,并把式(15)等号右端的前两项代入式(12)得

$$\frac{d}{0.027\ 4h}\ddot{\phi}(t) + \frac{cd}{0.027\ 4h\rho}\dot{\phi}(t) + \frac{5\ 966.4Dd}{0.027\ 4r_2^4h\rho}\phi(t) + \frac{0.052\ 7Ed^3}{0.027\ 4^3r_2^4\rho}\phi^3(t) =$$

$$44.3\varepsilon_0\varepsilon_r\pi(r_2 - r_1)\left(-\frac{v_0^2}{2}\cos 2\omega_1t + 2v_pv_0\sin\omega_1t\right) \quad (16)$$

其中等号右端分母可以由泰勒级数进行展开为

$$\frac{1}{(1 - \phi)^2} = 1 + 2\phi + 3\phi^2 + 4\phi^3 + o(\phi^4) \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)整理可得

$$\ddot{u}(t) + \mu'\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) + (2\eta_1\cos 2\omega_1t - 2\eta_2\sin\omega_1t)u(t) + (3\eta_1\cos 2\omega_1t - 3\eta_2\sin\omega_1t)u^2(t) + (\eta_3 + 4\eta_1\cos 2\omega_1t - 4\eta_2\sin\omega_1t)u^3(t) = -\eta_1\cos 2\omega_1t + \eta_2\sin\omega_1t \quad (18)$$

$$\text{其中, } \phi(t) = u(t); P = \frac{0.6\varepsilon_0\varepsilon_r\pi(r_2 - r_1)}{\rho d^3}; \mu' = \frac{c}{\rho};$$

$$\omega_0^2 = \frac{5\ 966.4D}{r_2^4\rho}; \eta_1 = \frac{Pv_0^2}{2}; \eta_2 = 2Pv_pv_0; \eta_3 = \frac{70.2Ehd^2}{r_2^4\rho}S_0.$$

2 环形极板机电耦合系统主共振-1/2 亚谐参数共振定常运动方程

通过代入数据可知,非线性项系数的数量级比线性项系数的数量级大,可以确定静电驱动下环形极板机电耦合模型数学方程(18)为强非线性方程,且有两个不同的外激频率。下面研究主共振-1/2 亚谐参数共振的定常运动方程,在阻尼项、参数项、杜芬项以及激励项前引入非小量参数 ε ,得系统的振动方程为

$$\ddot{u} + \omega_0^2u = \varepsilon[-\mu'\dot{u} - (2\eta_1\cos 2\omega_1t - 2\eta_2\sin\omega_1t)u - (3\eta_1\cos 2\omega_1t - 3\eta_2\sin\omega_1t)u^2 - (\eta_3 + 4\eta_1\cos 2\omega_1t - 4\eta_2\sin\omega_1t)u^3 - \eta_1\cos 2\omega_1t + \eta_2\sin\omega_1t] \quad (19)$$

令

$$2\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon\omega'_1 + \varepsilon^2\omega'_2 + \cdots \quad (20)$$

引入参数变换: $\alpha = \frac{\varepsilon\omega'_1}{\omega_0 + \varepsilon\omega'_1}$,显然有

$$\varepsilon = \frac{\alpha\omega_0}{(1 - \alpha)\omega'_1} \quad (21)$$

将小参数 α 引入到多尺度方法^[16]中,设方程(19)的一次渐近解为

$$u(t, \alpha) = u_0(T_0, T_1) + \alpha u_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (22)$$

式中, $T_0 = t, T_1 = \alpha t$ 。

将式(21)、式(22)代入方程(19),比较 α 同次幂的系数得到一组线性偏微分方程

$$D_0^2u_0 + \omega_0^2u_0 = 0 \quad (23)$$

$$D_0^2u_1 + \omega_0^2u_1 = -2D_0D_1u_0 + D_0^2u_0 + \omega_0^2u_0 - \frac{\omega_0}{\omega'_1}$$

$$[\mu'D_0u_0 + (2\eta_1\cos 2\omega_1t - 2\eta_2\sin\omega_1t)u_0 + (3\eta_1\cos 2\omega_1t - 3\eta_2\sin\omega_1t)u_0^2 + (\eta_3 + 4\eta_1\cos 2\omega_1t - 4\eta_2\sin\omega_1t)u_0^3 +$$

$$\eta_1 \cos 2\omega_1 t - \eta_2 \sin \omega_1 t] \quad (24)$$

式(23)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{j\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-j\omega_0 T_0} \quad (25)$$

式中,

$$A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2}e^{j\beta(T_1)}, \bar{A}(T_1) = \frac{a(T_1)}{2}e^{-j\beta(T_1)} \quad (26)$$

将式(25)代入式(24)得消除长期项的条件为

$$\begin{aligned} & -2j\omega_0 D_1 A e^{j\omega_0 T_0} - \frac{\omega_0}{\omega'_1} [j\omega_0 \mu' A e^{j\omega_0 T_0} + \\ & \frac{3}{2}\eta_1 A^2 e^{j(2\omega_0 T_0 - 2\omega_1 T_0)} + 3\eta_1 A \bar{A} e^{j2\omega_1 T_0} + \\ & 3\eta_3 A^2 \bar{A} e^{j\omega_0 T_0} + \frac{1}{2}\eta_1 e^{j2\omega_1 T_0}] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

式中,

$$2\omega_1 - \omega_0 = \alpha \quad (28)$$

将式(26)、式(28)代入式(27),整理得

$$\begin{aligned} & j\omega_0 D_1 a - \omega_0 a(1 - D_1 \varphi) + j \frac{\omega_0^2 \mu' a}{2\omega'_1} + \\ & \frac{3\eta_3 \omega_0 a^3}{8\omega'_1} + \frac{3\eta_1 \omega_0 a^2}{8\omega'_1} (\cos \varphi - j \sin \varphi) + \\ & \left(\frac{3\eta_1 \omega_0 a^2}{4\omega'_1} + \frac{\eta_1 \omega_0}{2\omega'_1} \right) (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

式中, $\varphi = T_1 - \beta$ 。分离实部虚部,且 $D_1 a = 0, D_1 \varphi = 0$, 且消去 φ ,可以得到系统满足主共振-1/2 亚谐参数共振定常解的幅频响应方程为

$$J_{10}a^{10} + J_8a^8 + J_6a^6 + J_4a^4 + J_2a^2 + J_0 = 0 \quad (30)$$

其中,

$$\begin{aligned} J_{10} &= 81\eta_3^2; \\ J_8 &= -432\eta_3\omega'_1 + 216\eta_3^2 - 729\eta_1^2; \\ J_6 &= 1\ 296\omega_0^2\mu'^2 + 576\omega_1'^2 - 1\ 152\eta_3\omega'_1 + 144\eta_3^2 - \\ & 2\ 592\eta_1^2; \\ J_4 &= 1\ 152\omega_0^2\mu'^2 + 1\ 536\omega_1'^2 - 768\eta_3\omega'_1 - 3\ 168\eta_1^2; \\ J_2 &= 256\omega_0^2\mu'^2 + 1\ 024\omega_1'^2 - 1\ 536\eta_1^2; \\ J_0 &= 256\eta_1^2 \end{aligned}$$

3 数值计算及结果分析

为了定量求解给各个参数赋值。电容器环形极板取值参考文献[11]⁷²¹⁻⁷²⁶[12]⁸⁰⁻⁸⁵,极板内外边缘固定且 $\xi = 0.41$,具体值为: $E = 200\text{ GPa}, \nu = 0.27, \rho = 2\ 300\text{ kg/m}^3, c = 1.2\text{ kg} \cdot \text{m/s}^3, h = 1.5\text{ }\mu\text{m}, d = 85\text{ }\mu\text{m}, r_2 = 760\text{ }\mu\text{m}, v_0 = 3\text{ V}, v_p = 3\text{ V}, \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}, \varepsilon_r = 1$ 。按式(30)用 Matlab 语言可以计算系统不同参数的幅频响应曲线,分析系统参数对幅频响应曲线的影响。

图 2 至图 6 为系统主共振-1/2 亚谐参数共振不同参数下的幅频响应曲线,可以看出它们均呈 M 形状,

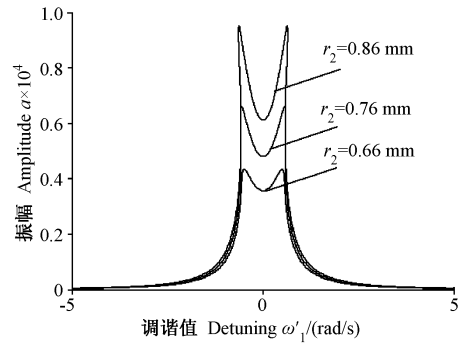


图 2 幅频响应曲线

Fig. 2 Frequency-response curves

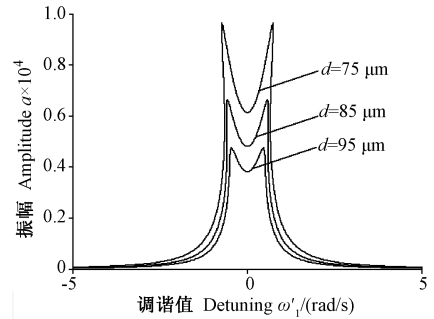


图 3 幅频响应曲线

Fig. 3 Frequency-response curves

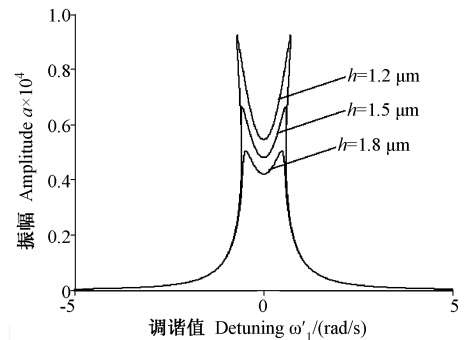


图 4 幅频响应曲线

Fig. 4 Frequency-response curves

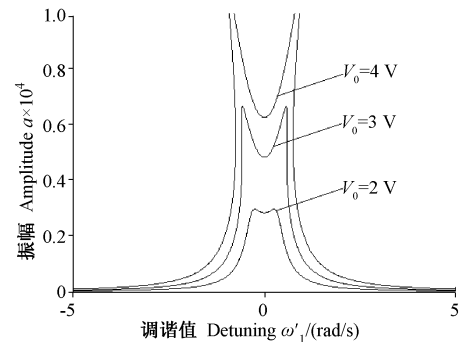


图 5 幅频响应曲线

Fig. 5 Frequency-response curves

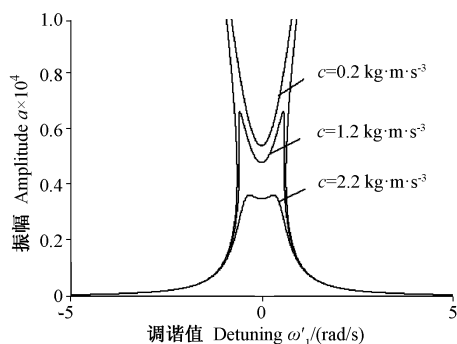


图 6 幅频响应曲线

Fig. 6 Frequency-response curves

具有双共振峰。这与经典非线性振动的主共振、1/2 亚谐参数共振的幅频响应曲线的单峰特征不同。系统响应曲线左右对称,左侧部分呈软特性特征,右侧部分呈硬特性特征^[17]。图 2 是取不同外径 r_2 时的幅频响应曲线,减小外径可以减小振幅和共振区间,这是由于减小极板半径极板弯曲刚度增大的缘故。图 3 为不同极板间距对应的幅频响应曲线,增加极板间距可以减小振幅和共振区,这是因为增大极板间距,极板间的电磁力减小。图 4 是不同极板厚度对应的幅频响应曲线,极板厚度越大振幅越小,这是由于增加极板厚度使极板弯曲刚度增大的缘故。图 5 是不同交流电压幅值对应的幅频响应曲线,增大电压的幅值,振幅和共振区明显的增加,这是由于增大电压的幅值可以使极板间电磁力增大的缘故。从图 6 可以看出阻尼越大振幅就越小。

4 结论

建立了环形极板机电耦合系统的动力学方程。通过代入参数比较线性项与非线性项的系数可知环形极板机电耦合系统为强非线性系统。将参数变换思想应用到多尺度法中可以对其进行求解。数值计算结果分析显示:当环形极板外激频率 $2\omega_1$ 等于系统固有频率 ω_0 时能激起系统主共振-1/2 亚谐参数共振。增大极板外径和交流电压幅值,可以增大振幅和共振区。增大极板的厚度、间距和阻尼系数可以减小振幅和共振区。以上分析对于环形极板参数的优化设计有参考价值。

参考文献 (References)

[1] 邱家俊. 机电偶联动力系统非线性振动[M]. 北京: 科学出版社, 1996: i - ii.
 QIU JiaJun. Nonlinear oscillation of coupled mechanical and electric dynamics system [M]. Beijing: Science Press, 1996: i - ii (In Chinese).
 [2] 向裕民. 电容器极板的非线性振动[J]. 非线性动力学学报,

1996, 3(1):67-72.

XIANG YuMin. Study on nonlinear oscillation of capacitor plates [J]. Journal of Nonlinear Dynamics, 1996, 3(1): 67-72 (In Chinese).

[3] 姚仲瑜. 用拉格朗日方程研究 RLC 电路的暂态过程[J]. 广西大学学报, 2001, 26(2):145-149.

YAO ZhongYu. Study on the transient state processes of RLC circuits by using Lagrange's equations [J]. Journal of Guangxi University, 2001, 26(2):145-149 (In Chinese).

[4] M. I. YOUNIS and A. H. NAYFEH. A Study of the Nonlinear Response of a Resonant Microbeam to an Electric Actuation [J]. Nonlinear Dynamics, 2003,31:91-117.

[5] G. NAKHAIE JAZAR. Mathematical Modeling and Simulation of Thermal Effects in Flexural Microcantilever Resonator Dynamics [J]. Journal of Vibration and Control, 12(2):139-163, 2006.

[6] S. K. Chakravathy. Nonlinear Oscillations Due To Spurious Energisation of Transformers [J]. IEE Proc-Electr. Power Appl, 1998, 145(6):585-592.

[7] 崔一辉, 杨志安. RLC 电路弹簧耦合系统的级数解[J]. 振动与冲击, 2006, 25(4):76-77;2006, 25(4):108.

CUI YiHui, YANG ZhiAn. The series solutions to coupled RLC circuit and spring system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25(4):76-77;2006, 25(4):108 (In Chinese).

[8] 杨志安, 崔一辉. RLC 电路弹簧耦合系统的非线性振动[J]. 唐山学院学报, 2005, 18(4):90-95.

YANG ZhiAn, CUI YiHui. Study on nonlinear oscillation of a coupled RLC circuit and spring system [J]. Journal of Tangshan College. 2005, 18(4):90-95 (In Chinese).

[9] 崔一辉, 杨志安. RLC 电路弹簧耦合系统的非线性动力学分析[J]. 河北理工大学学报, 2005, 27(4):49-54.

CUI YiHui, YANG ZhiAn. Study on nonlinear dynamics of coupled RLCS system [J]. Journal of Hebei Institute of Technology, 2005, 27(4):49-54 (In Chinese).

[10] 杨志安, 崔一辉. 非线性电阻电感型 RLC 串联电路主共振分析[J]. 天津大学学报, 2007, 40(5):579-583.

YANG ZhiAn, CUI YiHui. Primary resonance analysis of RLC series circuit with resistance and inductance nonlinearity [J]. Journal of Tianjin University, 2007, 40(5):579-583 (In Chinese).

[11] 杨志安, 贾尚帅. RLC 串联电路与微梁耦合系统的吸合压电与电震荡[J]. 应用力学学报, 2010, 27(4):721-726.

YANG ZhiAn, JIA ShangShuai. Pull-in voltage and electric oscillations of RLC series circuit and microbeam coupled system [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(4):721-726 (In Chinese).

[12] 杨志安, 贾尚帅. RLC 串联电路与微梁耦合系统 1:2 内共振分析[J]. 应用力学学报, 2010, 27(1):80-85.

YANG ZhiAn, JIA ShangHuai. Analysis of the 1:2 internal resonance of coupled RLC circuit and microbeam system [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(1):80-85 (In Chinese).

[13] A. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity [J]. Dover Publications, New York, 1944.

[14] T. Irie, G. Yamada, Y. Muramoto. Natural frequencies of in-plane vibration of annular plates [J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 97(1):171-175.

[15] G. Ambati, J. F. W. Bell, J. C. K. Sharp. In-plane vibration of annular rings [J]. Journal of Sound and Vibration, 1976, 47:425-432.

[16] 杨志安, 彭 震, 程英辉. 受简谐激励弹簧测力机构的主共振与奇异性分析[J]. 机械强度, 2006, 28(5):664-669.
YANG ZhiAn, PENG Zhen, CHENG YingHui. Primary resonance and its singularities analysis of dynamometer subjected to harmonic excitation[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(5):664-669(In Chinese).

[17] 杨志安, 韩彦斌. Winkler 地基上材料非线性矩形薄板 1/3 次亚谐共振[J]. 机械强度, 2010, 32(1):171-174.
YANG ZhiAn, HAN YanBin. 1/3 subharmonic resonant of thin rectangular plate on Winkler foundation considering material nonlinearity [J]. Journal of Mechanical Strength, 2010, 32(1):171-174(In Chinese).