

威布尔分布场合无失效数据的失效概率估计方法*

THE ESTIMATION TO FAILURE PROBABILITY FOR
ZERO-FAILURE DATA IN WEIBULL DISTRIBUTION

贾祥** 蒋平 郭波

(国防科技大学 信息系统与管理学院, 长沙 410073)

JIA Xiang JIANG Ping GUO Bo

(College of Information System and Management, National University of Defense Technology,
Changsha 410073, China)

摘要 随着产品可靠性的提高和成本的增加,以及研制周期的限制,现在可靠性试验常采取小样本、短周期,因此试验中收集到的往往是无失效数据,配分布曲线方法在处理这类无失效问题中应用较广。方法的关键步骤就是失效概率的估计,但是针对威布尔分布场合的失效概率估计,研究还比较缺乏。根据形状参数的不同取值范围,利用分布函数的特点和凹凸性,来确定对应的失效概率的取值范围。在实际操作中,可通过工程实践或者专家信息确定形状参数的取值范围,并进一步采用 Bayes 方法得到失效概率的估计值。仿真算例和轴承实例的计算分析也证明了该方法的有效性和稳健性。

关键词 无失效数据 失效概率 Bayes 估计

中图分类号 TB114.3

Abstract Nowadays, reliability tests are often carried out in small sample size and short duration, due to the improvement of product reliability and increasing of cost, as well as the restriction of development time. Therefore, zero-failure data are often collected in such tests. The Match Distribution Curve method is widely applied to handle zero-failure data. The key step to exercise the method is to estimate the failure probability, which is lack to research in the case of Weibull distribution. To estimate failure probability in Weibull distribution, the intervals of failure probability were proposed in this paper using the concavity or convexity and property of distribution function according to the intervals of shape parameter in Weibull distribution. Furthermore, to practically use the proposed method, the approximate value of shape parameter could be determined by engineering experience or expert information and the estimation of failure probability was calculated by Bayes method. A simulation case and a real example are presented to prove that this method is effective and robust.

Key words Zero-failure data; Failure probability; Bayes estimation

Corresponding author: JIA Xiang, E-mail: jiaxiang09@sina. cn, Fax: +86-731-84573514

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 71371182).

Manuscript received 20131225, in revised form 20140704

引言

当前产品的可靠性越来越高,寿命也越来越长,短时间内往往很难失效。但是在可靠性试验中,有限的时间和成本决定了试验时间不会太长,因此,搜集到的往往是无失效数据。出于工程实际的要求,这就需要我们根据这些无失效的数据来估计产品的可靠性指标。

无失效问题的模型可描述如下:设产品寿命 T 的分布函数为 $F(t, \theta)$, $Q \in \Theta$ 为分布参数, Θ 为参数空

间。现对该产品进行 k 次定时截尾试验,截尾时间为 $t_i (i = 1, 2, \cdots, k)$, 且 $t_1 < \cdots < t_k$, 在 t_i 处共试验 n_i 个样品。若试验的结果是所有样品无一失效,则称 (t_i, n_i) 为无失效数据,同时记在 t_i 时刻产品失效概率为 $p_i = P(T \leq t_i) = F(t_i)$ 。综上所述,试验提供的统计信息有:

1) $t = 0$ 时, $p_0 = 0$;

2) $p_1 < \cdots < p_k$;

3) 记 $s_i = \sum_{j=i}^k n_j$, 则表示在 t_i 时刻,还有 s_i 个样品

* 20131225 收到初稿, 20140704 收到修改稿。国家自然科学基金项目 (71371182) 资助。

** 贾祥, 男, 1992 年 1 月生, 河南省内乡县人, 汉族。国防科技大学信息系统与管理学院硕士研究生, 主要研究方向为装备综合保障、系统可靠性等。

未失效,即还有 s_i 个样品正在参与试验;

文献[1]首次提出了基于无失效数据的可靠性评估问题。现在对这一问题的处理,已经取得了不少成果。陈家鼎等^[2]提出了最优置信限法,基于各种分布场合,可以求出可靠性参数的点估计,同时该估计值也是单侧最优置信下限,但如果在任一截尾时刻,截尾产品的数量多于一个,该方法将不再适用,即该方法只适用于在截尾时刻 t_i 处,只截尾一个产品的情形;在无失效问题中,样品失效数 $r = 0$,此时已经不能再利用极大似然法来估计参数,王玲玲等^[3]提出了修正似然函数法,其实质是引入新的参数 L 来替代或修正 r 以继续利用似然法来估计分布参数。该方法的关键是参数 L 的选取,在部分应用文章中发现修正似然函数法估计可靠性参数时极易产生“冒进”的现象^{[4] 16-17};在实际工程中,若仅仅根据无失效数据直接对产品进行可靠性评定,结果极易“冒进”,基于这一问题,文献[4]³⁵⁻⁴⁵[5]¹⁰⁻¹⁷提出了引进失效信息来综合处理无失效问题的思路。但该方法运用的关键是失效时间的确定,目前常用的方法仍是根据无失效试验数据来估计,如果无失效试验时间远远少于产品的实际寿命,此刻估计出的失效时间往往也是不准确的。文献[6]引入“平均剩余寿命”这一概念,假设截尾时刻 t_i 处每个受试样品中的平均剩余寿命为 $m_T(t_i)$,则 $t_i + m_T(t_i)$ 即为 t_i 处每一受试样品的期望寿命,进一步加权平均可视为总体寿命的估计,结合特定分布下的寿命期望可建立拟矩方程。又因为方程中含有分布参数,反解出参数后就获取了分布参数的估计。但该方法计算复杂,运算量大,而且利用无失效数据来估计试验阶段的产品寿命比较困难;茆诗松^[7]提出了无失效数据问题的分析方法——配分布曲线法:首先对截尾时刻 t_i 处的失效概率 p_i 进行估计,然后利用诸点 (t_i, p_i) 配一条分布曲线以估计分布参数,进一步估计其他可靠性指标。常用的拟合分布曲线的方法是最小二乘法。该方法因为综合了失效概率的估计方法和最小二乘法,融合了多种信息,在实际中得到了广泛的应用。文献[8]³³⁰中的应用算例是该方法的经典算例。鉴于此,本文将进一步分析和探讨配分布曲线法的应用。

更多的研究成果具体可参看文献[9]。

1 威布尔分布及其特性

在评估产品的可靠性时,一般是假设或者验证产品寿命服从某种概率分布,进而利用试验获得的样本数据,估计得到分布参数,进一步进行相关可靠性指标的计算。威布尔分布是由最薄弱环节模型导出的,机械中的疲劳强度、疲劳寿命、磨损寿命、腐蚀寿命大多服从威布尔分布^{[10] 3}。二参数威布尔分布的概率密度函

数为

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^m \right] (t > 0) \quad (1)$$

对应的累积失效概率函数为

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^m \right] \quad (2)$$

其中, m 称为形状参数, η 称为尺度参数。失效率函数 $\lambda(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1}$ 为递增函数,这满足不少产品的实际特点。

威布尔分布在参数的不同取值下可转化为其他分布。当 $m = 1$, 且令 $\lambda = \eta^{-m}$ 时,即为指数分布;当 $m = 2$ 时,即为瑞利分布;当 m 取值在 $3 \sim 4$ 之间,接近正态分布^{[10] 15};令 $X = \ln T, u = \ln \eta, \sigma = m^{-1}$, 则 X 服从参数为 μ 和 σ 的极值分布。有研究指出威布尔分布在 $m \leq 1$ 时,可用于描述突发故障,而当 $m \geq 3.25$ 时,则仅仅描述渐变故障。当 m 在 1 到 3.25 之间变化时,威布尔分布描述突发故障和渐变故障的不同组合,且不同故障的比率取决于 m 的值^{[4] 18}。

威布尔分布的良好特性使得在应用中往往假设产品寿命服从威布尔分布。鉴于无失效问题的普遍性,非常有必要在威布尔分布场合,研究无失效问题的处理方法。相关成果可参看文献[11]。

本文将在威布尔分布场合,对配分布曲线方法的应用进行分析和改进。

2 失效概率的估计

令 $y = \ln \ln \frac{1}{1-F}, x = \ln t, b = m \ln \eta$, 可将式(2)变换为式(3)的形式,进一步可以用线性回归理论估计威布尔分布的分布参数

$$y = mx - b \quad (3)$$

传统的加权最小二乘估计法估计参数可参看文献[8]³²⁹⁻³³⁰。当参数 m, η 满足 $Q = \sum_{i=1}^k w_i (y_i - mx_i + m \ln \eta)^2$ 最小时,就得到加权最小二乘估计 $\hat{m}, \hat{\eta}$ 。可以证明,加权最小二乘估计值为无偏估计。

取 $w_i = \frac{n_i t_i}{\sum_{i=1}^k n_i t_i} (i = 1, 2, \dots, k)$, 并令 $A = \sum_{i=1}^k w_i x_i, B = \sum_{i=1}^k w_i x_i^2, C = \sum_{i=1}^k w_i y_i, D = \sum_{i=1}^k w_i x_i y_i$, 可按式(4)得分布参数 m, η 的加权最小二乘估计值

$$\hat{m} = \frac{B - A^2}{D - AC} \hat{\eta} = \exp \left(\frac{BC - AD}{B - A^2} \right) \quad (4)$$

在估计得到分布参数后,继而估计相关可靠性指标是很容易的。在得到 p_i 的估计后,可以通过最小

二乘法配一条威布尔分布曲线。由此可见,配分布曲线法应用的关键环节就是失效概率的估计。故本文将重点对失效概率估计的环节进行分析和改进。

2.1 失效概率估计方法现状

文献[4]⁹提出用式(5)来获取 p_i 的经典估计值,其实质上是估计上限 $\frac{1}{s_i + 1}$ 和估计下限 0 的平均值。经典估计过于简单粗略,使得估计结果往往不准确

$$\hat{p}_i = \frac{0.5}{s_i + 1} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (5)$$

更常用的是通过 Bayes 理论来估计 p_i , 实质是融合现场试验信息和验前信息,以使得 p_i 的估计更为准确。Bayes 理论将分布参数 θ 视为随机变量,利用专家信息、历史数据或者相似产品信息等验前信息,构造验前分布,利用式(6)求得 θ 的验后分布。在平方损失下, θ 的估计值 $\hat{\theta} = \int_{\theta} \theta \pi(\theta | x) d\theta$

即为验后分布的期望。其中 $f(x | \theta)$ 是产品关于参数 θ 的概率密度函数,也可以取样本的似然函数 L , $\pi(\theta)$ 是参数 θ 的验前分布

$$\pi(\theta | x) = \frac{\pi(\theta)f(x | \theta)}{\int_{\theta} \pi(\theta)f(x | \theta) d\theta} \quad (6)$$

在小子样问题背景下,验后分布可综合各种信息,故 Bayes 理论比经典统计理论更有优势。在无失效问题中,利用 Bayes 理论估计 p_i 时通常取似然函数 $L = (1 - p_i)^{s_i}$, 估计 p_i 的关键就是构造参数 p_i 的验前分布。在配分布曲线法中,如何利用 Bayes 方法估计失效概率,可参看文献[12]。关于验前分布的确定有两个关键问题:一是验前分布的形式;二是验前分布中 p 的取值范围。

对于验前分布的形式,简单处理可认为 p 服从均匀分布。但直观想象,试验中搜集到的都是无失效数据,则 p_i 取值较大的概率较小,取值较小的概率较大。基于此,文献[13]提出了减函数的思想,即构造的验前分布应满足上述直观认识。现在这一思想在应用中已得到了大多数人的认可。如,文献[5]⁶⁻⁸取减函数 p_i^{a-1} ($0 < a < 1$) 作为验前分布的核,通过 Bayes 方法对极值分布场合 p_i 的估计进行了探讨;对于 p 的取值范围,文献[14]¹⁸⁶基于正态分布场合,在 $t < \mu$ 时,验证得正态分布的累积失效概率函数 $F(t)$ 是 t 的凹函数。由凹函数性质,有结论

$$0 < \frac{p_1}{t_1} < \frac{p_2}{t_2} < \dots < \frac{p_k}{t_k} < \frac{p_u}{t_k} \quad (7)$$

得到 p_i 的取值范围为 $[0, \frac{t_i}{t_k} p_u]$, 其中 p_u 为专家或工程上确定的取值上限。这一理论启发我们,在基

于特定分布场合下,如果没有多余的验前信息,可利用该分布自身的性质判断 p_i 的取值范围。文献[5]¹⁻⁹基于这一思想,在极值分布场合,利用凹凸性,估计得到 p_i 的取值范围为 $[p_{i-1}, \frac{t_i}{t_k} p_u]$;文献[4]⁵⁻¹⁷在指数分布场合,利用凹凸性,估计得到 p_i 的取值范围为 $[p_{i-1}, \frac{t_i}{t_{i-1}} p_{i-1}]$ 。

但对威布尔分布,文献[4]⁴¹指出在一定的条件下,也可以利用凹凸性进行类似的分析,但条件具体是什么以及不满足条件时应当怎么处理都没有深入探讨。本文将对威布尔分布场合,利用凹凸性估计失效概率时的具体条件及不同条件下对应的处理方法进行深入探讨。

2.2 威布尔分布场合失效概率的估计

目前工程上已经积累了大量的威布尔分布的试验数据。研究结果表明关于威布尔分布的形状参数 m , 对于铝合金结构是 4, 对于钛合金结构是 3, 对于钢结构是 2.2。在工程实践中,一般可以知道威布尔分布的形状参数在 1 ~ 10 之间^{[15] 59}。由此本文限定 m 的取值区间为 $[0, 10]$ 。

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{mt^{m-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right)}{\eta^m} \left(m - 1 - \frac{mt^m}{\eta^m}\right) \quad (8)$$

式(8)为式(2)的二阶导数。由式(8)知,当 $0 < m \leq 1$ 时, $\frac{d^2 F}{dt^2} < 0$; 当 $m > 1$ 时,令 $t_{\text{turn}} = \eta \left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}$; 若 $t \in [0, t_{\text{turn}})$, 则 $\frac{d^2 F}{dt^2} > 0$; 若 $t \in (t_{\text{turn}}, +\infty]$, $\frac{d^2 F}{dt^2} < 0$; 由凹凸性的判定条件可知,当 $0 < m \leq 1$ 时, $F(t)$ 为凸函数; 当 $m > 1$, 若 $t \in [0, t_{\text{turn}})$, 则 $F(t)$ 为凹函数。

上述结论指出了在威布尔分布场合,运用凹凸性来判断 p_i 取值范围的条件。

当 $0 < m \leq 1$, 由于 $F(t)$ 为凸函数。由凸函数性质可得

$$\frac{p_1}{t_1} > \frac{p_2}{t_2} > \dots > \frac{p_{i-1}}{t_{i-1}} > \frac{p_i}{t_i} > \dots > \frac{p_k}{t_k} \quad (9)$$

结合 $p_{i-1} < p_i$ 可得式(10)。该式即为验前分布中 p_i 的取值范围。

$$p_{i-1} < p_i < \frac{t_i}{t_{i-1}} p_{i-1} \quad (i \geq 2) \quad (10)$$

对于 p_1 , 目前通用的方法是利用经典估计计算。本文依旧利用 Bayes 方法估计。限定 p_1 的参数范围为 $0 < p_1 < p_{\text{lim}}$, 其中 p_{lim} 是其取值上限。工程实践中往往取 $p_{\text{lim}} = 0.5$, 事实上因为在无失效问题中可以认为

$p_1 < p_i \leq 0.5$ ($i \geq 2$)。故 $p_{\lim}$ 取值可以比 0.5 更小。

当 $m > 1$ 时, $F(t)$ 在整个定义域内不具备凹凸性。当 $F = 0.5$ 时, 解得 $t_{\text{mid}} = \eta \exp\left(\frac{\ln \ln 2}{m}\right)$, 又可得拐点横坐标 $t_{\text{turn}} = \eta \left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}$ 。考虑收集到的全部是无失效数据, 可认为 $t_1 < \dots < t_k < t_{\text{mid}}$ 。若 $t_{\text{mid}} \leq t_{\text{turn}}$, 则亦可利用凹凸性来解决这一问题。定义 $g(x) = \exp\left(\frac{\ln \ln 2}{x}\right)$, $h(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $x \in (1, 10]$ 。利用单调性判定方法, 可证明 $g(x)$ 、 $h(x)$ 在定义域内都是单调递增函数, 且当 $x \approx 3.3$ 时, $g(x) = h(x)$, 如图 1 所示。因此可得结论当 $m \geq 3.3$ 时, $t_{\text{mid}} \leq t_{\text{turn}}$, 此时 $F(t)$ 为凹函数。

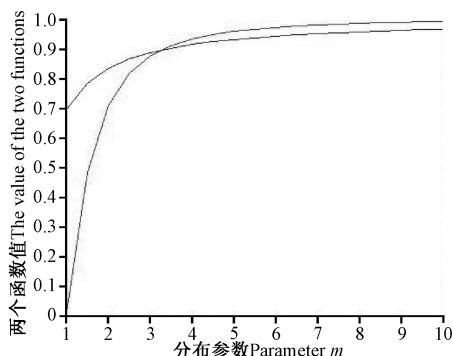


图1 拐点横坐标数值与 $F=0.5$ 对应时间数值的比较

Fig. 1 the value comparison between the abscissas of inflection point and the time when the failure probability is 0.5

当 $3.3 \leq m \leq 10$ 时, $F(t)$ 为凹函数, 由凹函数性质可得式(7), 进一步有结论: $\frac{t_i}{t_{i-1}} p_{i-1} < p_i$ 。这里还需

确定 p_i 的上界。借用文献[14]¹⁸⁶的做法, 将所有 p_i 的上界都取为固定值 p_{upp} , 而 p_{upp} 的取值可由专家信息或工程实践经验确定。综上所述, 当 $m \in [3.3, 10]$,

$$p_i \in \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} p_{i-1}, p_{\text{upp}}\right)。$$

当 $1 < m < 3.3$ 时, 已不能再利用凹凸性了。此时利用文献[16]提出的一种方法。对 $F(t)$ 进行变换可得式(11)。将 p_{i-1} 、 p_i 对应的式(11)相减得式(12)

$$\ln \ln \frac{1}{1-p} = m \ln t - m \ln \eta \quad (11)$$

$$\ln \frac{\ln(1-p_{i-1})}{\ln(1-p_i)} = m \ln \frac{t_{i-1}}{t_i} < \ln \frac{t_{i-1}}{t_i} \quad (12)$$

等价于 $\frac{\ln(1-p_{i-1})}{t_{i-1}} > \frac{\ln(1-p_i)}{t_i}$, 进一步得 p_i 下限 $1 - (1 - p_{i-1})^{\frac{t_i}{t_{i-1}}}$ 。类似地, p_i 的上限也取为 p_{upp} 。综上

所述, 当 $m \in (1, 3.3)$ 时。 $p_i \in (1 - (1 - p_{i-1})^{\frac{t_i}{t_{i-1}}}, p_{\text{upp}})$ 。

至此, 已给出了 m 的各种取值下, 在验前分布中失效概率 p_i 的取值范围, 统一记为 $p_i \in (p_l, p_u)$ 。令 $(1 - p_i)^2$ 为验前分布的核, 为使 $\int_p A (1 - p_i)^2 dp = 1$, 则取验前分布函数为 $\pi(p_i) = \frac{3 (1 - p_i)^2}{(1 - p_l)^3 - (1 - p_u)^3}$, 利用式(6)求得验后分布为

$\pi(p_i | s) = \frac{(s_i + 3)(1 - p_i)^{s_i+2}}{(1 - p_l)^{s_i+3} - (1 - p_u)^{s_i+3}}$ 。在平方损失下, 取 p_i 的期望作为 p_i 的估计值

$$\begin{cases} \hat{p}_i = \frac{s_i + 3}{(1 - p_l)^{s_i+3} - (1 - p_u)^{s_i+3}} [q(p_u) - q(p_l)] \\ q(x) = \frac{(1 - x)^{s_i+4}}{s_i + 4} - \frac{(1 - x)^{s_i+3}}{s_i + 3} \end{cases} \quad (13)$$

具体运用该方法时还需明确 m , 以对应选择 p_i 的取值范围。只需大概估计参数 m 的取值范围就可以采用上述方法来估计 p_i 。工程上积累的大量资料或者专家的判断有助于我们大概估计参数 m 的取值范围^{[15]59}。

2.3 方法总结

综上所述, 该方法具体步骤如下:

- 1) 首先利用工程实际或专家信息粗略估计威布尔分布中的形状参数;
- 2) 根据 m 的估计值, 按照式(14)确定失效概率 p_i 在验前分布中的取值范围

$$\begin{cases} i \geq 2, p_i \in \begin{cases} \left(p_{i-1}, \frac{t_i}{t_{i-1}} p_{i-1}\right) & 0 < m \leq 1 \\ \left(1 - (1 - p_{i-1})^{\frac{t_i}{t_{i-1}}}, p_{\text{upp}}\right) & 1 < m < 3.3 \\ \left(\frac{t_i}{t_{i-1}} p_{i-1}, p_{\text{upp}}\right) & 3.3 \leq m \leq 10 \end{cases} \\ p_1 \in (0, p_{\text{upper}}) \end{cases} \quad (14)$$

- 3) 基于样本, 利用式(13)估计失效概率 p_i 。

3 算例

3.1 仿真算例

为了便于与真值进行比较, 以验证采用本文提出的方法来估计失效概率的准确性, 首先利用仿真样本。设共有 12 个样品, 6 次截尾实验。参考文献[18], 通过以下步骤生成无失效数据的仿真样本:

- 1) 设定威布尔分布参数真值, 通过 Matlab 生成失效时间 t_i ($i = 1, \dots, 12$);

- 2) 生成服从 $(0,1)$ 均匀分布的随机数 u_i ;
- 3) 将时间 t_i 更新为 $u_i t_i$, 视为无失效时间 t_i ;
- 4) 将 $t_i (i = 1, \cdots, 12)$ 随机分为 6 组, 第 i 组中有 n_i 个截尾时间, 选取其中最小的 $t_l (l = 1, \cdots, n_i)$ 作为组 i 的截尾时间, 构成样本量 $(t_j, n_j) (j = 1, \cdots, 6)$;
- 按照式 (14) 中 m 的取值区间, 分别生成一组仿真

样本, 具体数据见表 1。在生成样本后, 则估计 t_i 处的失效概率, 并与真实值进行对比, 同时与经典估计结果进行对比。经典估计按式 (5) 计算。在该算例中, 假定已经通过工程实践或者专家判断, 确定了参数 m 的取值范围, 并通过改变参数 p_{lim} 和 p_{upp} 的取值, 探讨这两个参数的设置对结果的影响。

表 1 仿真样本数据
Tab.1 the data of simulation sample

编号 Number	分布参数 Distribution parameter	时间 Time t/h	样品 Sample n	编号 Number	分布参数 Distribution parameter	时间 Time t/h	样品 Sample n	编号 Number	分布参数 Distribution parameter	时间 Time t/h	样品 Sample n
1	$m = 0.8$ $\eta = 3\,000$	17.581	1	1	$m = 1.8$ $\eta = 3\,000$	548.413	1	1	$m = 3.8$ $\eta = 3\,000$	878.15	2
2		79.365	1	2		1\,274.398	1	2		1\,492.336	2
3		282.833	2	3		1\,503.765	2	3		1\,946.596	1
4		453.709	1	4		2\,056.622	1	4		2\,081.257	1
5		972.408	1	5		2\,121.789	1	5		2\,170.705	1
6		999.133	6	6		2\,419.766	6	6		2\,232.764	5

对应分布参数为 $m = 0.8, \eta = 3\,000$ 时生成的仿真样本, 图 2 展示了相应的计算结果。在计算中, 分别取 p_{lim} 为 0.2 和 0.3, 以分析 p_{lim} 的取值对结果的影响。对应分布参数 $m = 1.8, \eta = 3\,000$ 和 $m = 3.8, \eta = 3\,000$ 时的仿真样本, 图 3、图 4 则分别展示了相应的计算结果。在计算中, 令 $p_{lim} = 0.3$, 并分别取 p_{upp} 为 0.4 和 0.5, 以分析 p_{upp} 的取值对结果的影响。所有图形的左图为本文提出的方法的估计值、经典估计值和真值的结果对比, 右侧为本文提出的方法与真值的绝对误差和经典估计值与真值的绝对误差的对比, 其中估计值由本文提出的方法计算得到。观察图形可发现:

- 1) 由图 2 知, 参数 p_{lim} 取值不同时, 失效概率的估计结果有一定差异, 但相差不大;
- 2) 由图 3、图 4 知, 参数 p_{upp} 取值不同时, 前半部分截尾时刻的失效概率估计结果相差不大, 但后半部分截尾时刻的估计结果相差较大。这是因为后半部分

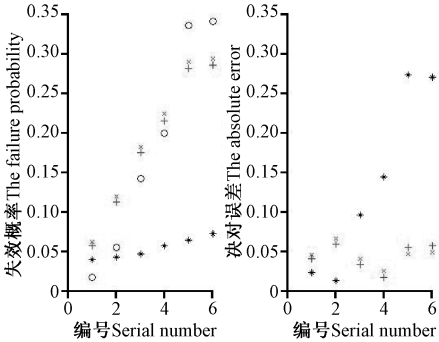


图 2 $m = 0.8$ 时失效概率估计值对比
Fig.2 The comparison of failure probability estimations when $m = 0.8$

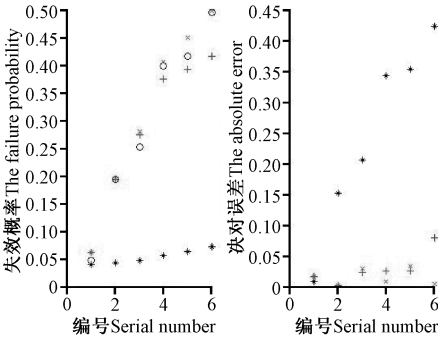


图 3 $m = 1.8$ 失效概率估计值对比
Fig.3 The comparison of failure probability estimations when $m = 1.8$

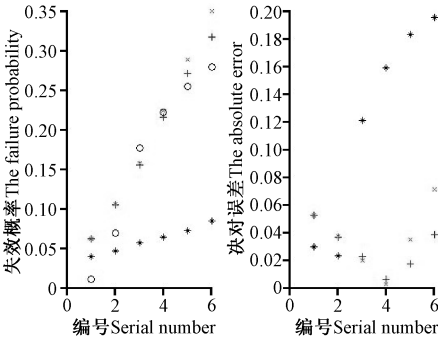


图 4 $m = 3.8$ 失效概率估计值对比
Fig.4 The comparison of failure probability estimations when $m = 3.8$

截尾时刻的失效概率越来越接近 p_{upp} 的取值, 说明 p_{upp} 取值不同时对结果的影响集中在后半部分截尾时刻的失效概率估计。因而在实际运用中对 p_{upp} 的取值, 需要慎重考虑;

3) 虽然对于前两个截尾时刻的失效概率,通过经典估计方法计算得到的结果误差比本文提出的方法相对应的结果较小,但对于其他截尾时刻的失效概率,本文提出的方法计算的结果误差明显比经典估计的结果要好,尤其对于后半部分截尾时刻的失效概率,由经典估计方法计算得到的结果误差太大,难以接受。故总体而言,本文提出的方法估计结果精度相对较高。

由此可得,在 m 的不同取值范围下,当合理设定参数后,利用本文提出的方法估计的失效概率比根据经典估计法计算得到的结果精度要高,这证明了该方法的有效性。

3.2 轴承实例

文献[8]³³⁰中关于轴承的算例,是配分布曲线法应用的经典算例,实例数据见表 2。下面,将基于该算例,运用本文提出的方法进行求解,并与文献[8]³³⁰的结果进行比较。

表 2 轴承数据

Tab.2 the data of bearing

时间 Time t/h	422	539	602	770	847	924
样品 Sample n	2	4	2	4	4	4

轴承的主要材料是钢,由文献[15]知, m 的取值大约为 2.2,此时由式(14)可确定 p_i 的取值范围。又因为该轴承的寿命较长,截尾试验时间比较短,可认为在截尾时刻处的失效概率很小,故考虑设参数 p_{lim} 为 0.03,参数 p_{upp} 为 0.05 和 0.1。之所以固定 p_{lim} 是因为 p_{lim} 对结果的影响不大,而改变 p_{upp} 是希望进一步观察 p_{upp} 的取值对结果的影响。采用文献[8]³²⁶⁻³³¹中分布参数的一组估计值 $m = 2.32, \eta = 3\,377$ 作为真值来计算截尾时刻处失效概率的真值,并与不同 p_{upp} 下的计算结果相比较,如图 5 所示。

观察图 5 可发现,若文献[8]³²⁶⁻³³¹的计算结果比较准确,则当 p_{upp} 取值为 0.05 时,估计结果与 p_{upp} 取值为 0.1 时计算的结果,相对更准确,且与真值相比结果比较接近。这说明当 p_{upp} 取值较为合理时,本文提出的方法估计结果比较准确。这也间接验证了 3.1 中得到的结论。

4 结论

本文针对威布尔分布无失效情况下的失效概率估计问题,借鉴配分布曲线方法的思路,采用减函数法与 Bayes 理论相结合的方式来估计失效概率。根据威布尔分布参数 m 的不同取值,结合分布函数的凹凸性或自身性质,分别提出了失效概率 p 的取值范围,并进一步利用减函数法构造验前分布,运用 Bayes 方法得到 p_i 的估计值。在算例分析中,通过仿真算例和轴承实

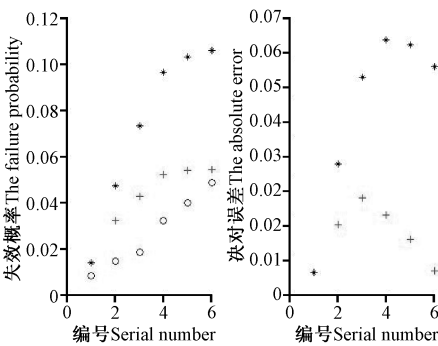


图 5 轴承数据的失效概率估计值对比

Fig.5 The comparison of failure probability estimations for bearing data

例,经过结果的比较,说明当本文提出的方法中的相关参数设置合理时,该方法是有效的和稳健的。

参考文献 (References)

[1] VMartz H F, Waller R A. A bayes zero-failure (BAZE) reliability demonstration testing procedure[J]. Journal of Quality Technology, 1979, 11(3):128-137.

[2] 陈家鼎,孙万龙,李补喜.关于无失效数据情形下的置信限[J].应用数学学报.1995,18(1):90-100.

CHEN JiaDing, SUN WanLong, LI BoXi. On the confidence limits in the case of no failure data[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1995, 18(1):90-100(In Chinese).

[3] 王玲玲,王炳兴.无失效数据的统计分析——修正似然函数方法[J].数理统计与应用概率.1996,11(1):64-70.

WANG LingLing, WANG BingXing. Statistical analysis for no-failure data-modified likelihood function method[J]. Mathematical Statistics and Applied Probability. 1996, 11 (1): 64-70 (in Chinese).

[4] 宁江凡.液体火箭发动机无失效条件下的可靠性评估方法研究[D].长沙:国防科学技术大学,2005:08-45.

NING JiangFan. Study on reliability assessment method for liquid rocket engine in the case of zero-failure data [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005: 08-45 (In Chinese).

[5] 李凡群.关于无失效数据的统计分析[D].合肥:安徽师范大学,2006:01-18.

LI FanQun, The statistical analysis of zero-failure data[D]. Hefei: Anhui Normal University, 2006:01-18(In Chinese).

[6] 倪中新,费鹤良.威布尔分布无失效数据的统计分析[J].应用数学学报,2003,26(3):533-543.

NI ZhongXin, FEI HeLiang. Statistical analysis of the zero-failure data in Weibulldistribution [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, 26(3):533-543(In Chinese).

[7] 茆诗松,罗朝斌.无失效数据的可靠性分析[J].数理统计与应用概率,1989,4(4):489-506.

MAO ShiSong, LUO ChaoBin. The reliability analysis for zero-failure data [J]. Mathematical Statistics and Applied Probability, 1989, 4 (4): 489-506 (In Chinese).

- [8] 茆诗松,夏剑锋,管文琪. 轴承寿命试验中无失效数据的处理 [J]. 应用概率统计. 1993, 9(3):326-331.
MAO ShiSong, XIA JianFeng, GUAN WenQi. The reliability analysis of zero-failure data for bearing life test [J]. Chinese Journey of Applied Probability and Statistics, 1993, 9(3):326-331 (In Chinese).
- [9] 韩 明. 无失效数据可靠性进展 [J]. 数学进展. 2002, 31(1):7-19.
HAN Ming. The advances of reliability for zero-failure data [J]. Advances in Mathematics. 2002, 31(1):7-19 (In Chinese).
- [10] 凌 丹. 威布尔分布模型及其在机械可靠性中的应用研究 [D]. 成都:电子科技大学, 2010:3-16.
LING Dan. Research on weibull distribution and its applications in mechanical reliability engineering. [D]. Chengdu: university Of electronic science and technology, 2010:3-16 (In Chinese).
- [11] 茆诗松,王玲玲,濮晓龙. 威布尔分布场合无失效数据的可靠性分析 [J]. 应用概率统计. 1996, 12(1):95-107.
MAO ShiSong, WANG LingLing, PU XiaoLong. Reliability analysis for weibull zero-failure data [J]. Chinese Journey of Applied Probability and Statistics, 1996, 12(1):95-107 (In Chinese).
- [12] 王 伟,夏新涛. 配分布曲线法在无失效数据可靠性分析中的应用 [J]. 轴承. 2006, (3):20-22.
WANG Wei, XIA XinTao. Application of partition distribution curve method in reliability analysis of zero-failure data. [J]. Bearing, 2006, (3):20-22 (In Chinese).
- [13] 韩 明. 多层先验分布的构造及其应用 [J]. 运筹与管理. 1997, 6(3):31-40.
HAN Ming. The Structure of Hierarchical Prior Distribution and Its Application. [J]. Operations Research and Management Science, 1997, 6(3):31-40 (In Chinese).
- [14] 张志华. 正态分布场合下只有一个失效数据的统计分析 [J]. 应用概率统计, 1998, 14(2):185-190.
ZHANG ZhiHua. Statistical analysis of data only one failure under normal case [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 1998, 14(2):185-190 (In Chinese).
- [15] 韩 明. Weibull 分布可靠性参数的置信限 [J]. 机械强度, 2009, 31(1):59-62.
HAN Ming. Confidence limits of reliability parameters for Weibull distribution [J]. Journal of Mechanical Strength, 2009, 31(1):59-62 (In Chinese).
- [16] 熊莲花. 无失效数据的可靠性统计分析 [D]. 长春:吉林大学, 2004:29-32.
XIONG LianHua. Statistical analysis of reliability about zero-failure data. [D]. Changchun: Jilin University, 2004:29-32 (In Chinese).
- [17] Der Chiang Li, Liang Sian Lin. A new approach to assess product lifetime Performance for small data sets [J]. European Journal of Operational Research. 230(2013):290-298.
- [18] L. F Zhang, M Xie, L. C Tang. A study of two estimation approaches for parameter of Weibull distribution based on WPP. Reliability Engineering and System Safety. 92(2007) 360-368.