

无限长带形域内圆孔的反平面响应*

ANTI-PLANE RESPONSES OF CIRCULAR CAVITY IN INFINITE BAND DOMAIN

史文谱**^{1,2} 高伊韬^{1,2}

(1. 烟台大学 机电汽车工程学院, 烟台 264005)

(2. 山东省高校先进制造与控制技术重点实验室, 烟台 264005)

SHI WenPu^{1,2} GAO YiTao^{1,2}

(1. School of Mechatronics and Automobile Engineering, Yantai University, Yantai 264005, China)

(2. Key Laboratory of Advanced Manufacturing and Control Technology in Universities of Shandong, Yantai University, Yantai 264005, China)

摘要 无限大带形域内含圆孔的弹性波散射问题, 由于涉及到两条直边界, 在理论研究上一直是无法解决的问题, 而只能借助于数值求解的办法。利用复变函数法、虚源法和 Graf 加法公式给出了该问题的散射波解析解, 它能够预先满足两条边界上的应力自由条件, 利用圆孔边界处的应力边界条件和傅立叶级数展开来确定散射波函数中的未知系数, 从而确定出带形域内的波场, 最后通过一个算例计算了圆孔边界处的环向动应力集中系数, 说明了文中结论和算法的正确性。

关键词 带形域 圆孔 反平面响应 复变函数法 应力集中系数

中图分类号 O347.41

Abstract The elastic wave scattering problem of circular cavity in infinite band domain has no been solved because of the existence of the two straight line boundaries which can only be solved with the help of numerical method before. In this paper, complex function method and virtual source method and Graf addition formulae are used to study this problem and the analytical solution of the scattering waves can be given, which can satisfy the stress free boundaries of the two boundaries, the unknown coefficients in the scattering wave functions can be obtained by using the boundary condition of the circular cavity and Fourier series expansion technology, then the wave fields of the band domain can be determined, the results of the given numerical example about the dynamical stress concentration factors on the circular cavity boundary show the rightness of the conclusions and the algebraic.

Key words Band domain; Circular cavity; Out-of-plane response; Complex function method; Stress concentration factor

Corresponding author: SHI WenPu, E-mail: swp636793@163.com, Tel: +86-535-6902402, Fax: +86-535-6902402

The project supported by the Shandong Province Science and Technology Research Projects (No. 2012G0030011), and the National Youth Fund Projects (No. 11202179).

Manuscript received 20141105, in revised form 20141118

引言

弹性介质中波的传播和散射理论在无损检测、石油探测、声纳和地震勘测等工程中都有广泛应用。人们对弹性波的研究由来已久, 且已取得许多成就^{[1]138-219}, 其中大多是关于全空间^{[1]138-219}半空间和含界面复合空间中稳态波的传播和散射问题研究。从理论上说, 稳态波的散射问题就是一个 Helmholtz 方程(组)边值问题, 其研究难点主要是散射波的构造问

题, 这取决于问题边界的形状、位置和数量上。文献[2]研究了双质复合材料界面上斜交裂纹对 SH 波的散射问题; 文献[3]采用复变函数法和虚源法研究了直角平面内圆孔对稳态 SH 波的散射问题; 文献[4]推出了半空间界面上 V 形峡谷对 SH 波散射的统一理论解; 文献[5]作者采用波函数展开法和分区思想探讨了半空间界面上不等边三角形凸起对稳态 SH 波的散射问题; 文献[6]研究了半空间界面多个凹陷和凸起对稳态 SH 波的散射问题; 文献[7]作者研究了半空间

* 20141105 收到初稿, 20141118 收到修改稿。山东省科技攻关项目 (2012G0030011), 国家青年基金项目 (11202179) 资助。

** 史文谱, 男, 1963 年 10 月生, 汉族, 山东烟台人, 烟台大学副教授, 博士, 主要从事弹性波理论及应用研究。

界面下任意形孔洞对入射 SH 波的散射问题;文献[8]探讨了介质层中小夹杂对平面弹性波的散射问题;文献[9]作者研究了弹性薄壁刚性支撑夹杂对 SH 波的散射问题;文献[10]研究了具有常数梯度速率的沉积盆地对入射 SH 波散射的模拟问题,文献[11]中,作者利用大圆逼近半空间直边界的方法探讨了有弹性约束半空间内圆孔的反平面散射问题。从文献来看,有关单层介质中圆孔在孔洞边界反平面载荷扰动下的动态响应问题,由于涉及到两条平行自由边界,在具体构造散射波函数时存在一定的困难,一直未能很好解决。本文采用复变函数法、Graf 加法公式和虚源法给出了该问题的级数解,并通过数值算例验证了计算方法。

1 问题模型和分析

图 1 所示的无限长带形区域内含有一个半径为 R 的圆孔,其中心与带形区域上边界 Γ_3 的垂直距离为 h_1 ,与下边界 Γ_2 的垂直距离为 h_2 ;带形区域介质的剪切模量和质量体密度分别为 μ,ρ 。假设在圆孔边界处作用了一个稳态反平面分布力系 $f(\theta)\exp(-i\omega t)$,边界 Γ_2,Γ_3 是应力自由的,建立图示坐标系 xoy 。其中 i 是虚数单位,定义为 $i^2 = -1$; ω 是扰动载荷的圆周频率。

对于稳态反平面波散射问题,介质内的位移场 $U(r,\theta,t) = W(r,\theta)\exp(-i\omega t)$ 满足如下波动方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - V^2 \nabla^2 U = 0$$

(1)

其中, V 是波速,定义为 $V = \sqrt{\mu/\rho}$; ∇^2 是 Laplace 算子。

从式 (1) 可得位移幅度函数 $W(r,\theta)$ 满足的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 W + K^2 W = 0$$

(2)

由图 1 可列出问题的边界条件为

$$\begin{cases} \tau_{yz}|_{y=h_1} = 0 \\ \tau_{yz}|_{y=-h_2} = 0 \\ \tau_{rz}|_{r=R} = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

(3)

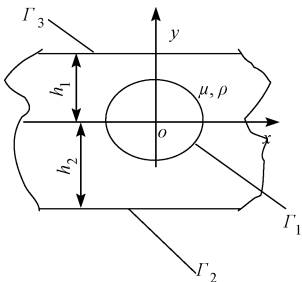


图 1 带形域内的圆孔

Fig. 1 The circular cavity in infinite band domain

其中, τ_{yz}, τ_{rz} 分别是 y 面和 r 面上的剪切应力,由弹性力学知道,它们分别定义为 $\tau_{yz} = \mu \partial W / \partial y$ 和 $\tau_{rz} = \mu \partial W / \partial r = \mu (e^{i\theta} \partial W / \partial z + e^{-i\theta} \partial W / \partial \bar{z})$; (r, θ) 是点的极坐标。

直接求解式 (2) 和式 (3) 是有困难的,本文采用虚源法得到带形区域内如下散射波函数

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \{ H_n^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^n + \sum_{m=1}^{\infty} [H_n^{(1)}(K|z_1|) \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{(-1)^{m_n}} + H_n^{(1)}(K|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{(-1)^{m_n}}] \}$$

(4)

其中, z, z_1, z_2 都是复数,它们分别定义为

$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \exp(i\theta)$, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数。

$$z_1 = \begin{cases} z + m(h_1 + h_2)i, m \text{ 为偶数} \\ z - [(m+1)h_1 + (m-1)h_2]i, m \text{ 为奇数} \end{cases}$$
$$z_2 = \begin{cases} z - m(h_1 + h_2)i, m \text{ 为偶数} \\ z + [(m-1)h_1 + (m+1)h_2]i, m \text{ 为奇数} \end{cases}$$
$$A_n (n = 0, \pm 1, \dots) \text{ 是待定系数。}$$

经过验证,上述散射波函数能够预先满足边界 Γ_2, Γ_3 处的应力自由条件。

为便于保证结果的计算精度和收敛速度,利用 Graf 加法公式^[12],将 (4) 中含 z_1 的项改写为如下形式 (图 2)

$$H_n^{(1)}(K|z_1|) (z_1/|z_1|)^{-n} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(3n+q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) J_q(K|z|) (z/|z|)^q,$$
$$m \text{ 为奇数}$$
$$H_n^{(1)}(K|z_1|) (z_1/|z_1|)^n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(3n+q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) J_q(K|z|) (z/|z|)^{-q},$$
$$m \text{ 为偶数}$$

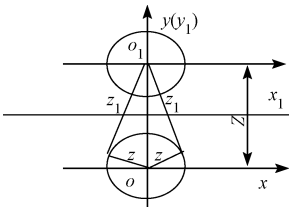


图 2 加法公式参考

Fig. 2 Reference of addition formula

其中,

$$Z_m^{(1)} = \begin{cases} 2m(h_1 + h_2)i, m \text{ 为偶数} \\ 2[(m+1)h_1 + (m-1)h_2]i, m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

将式(4)中含 z_2 的项改写为如下形式(图3)

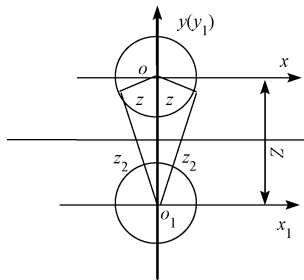


图3 加法公式参考

Fig. 3 Reference of addition formula

$$H_n^{(1)}(K|z_2|) (z_2/|z_2|)^{-n} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(n+3q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) J_q(K|z|) (z/|z|)^q, \\ m \text{ 为奇数} \\ H_n^{(1)}(K|z_2|) (z_2/|z_2|)^n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(3q+n)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) J_q(K|z|) (z/|z|)^{-q}, \\ m \text{ 为偶数} \\ \text{其中,}$$

$$Z_m^{(2)} = \begin{cases} 2m(h_1 + h_2)i, m \text{ 为偶数} \\ 2[(m-1)h_1 + (m+1)h_2]i, m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\frac{2}{K} \frac{\partial W}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{n-1}^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{n-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} - \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(3n+q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) J_{q+1}(K|z|) (z/|z|)^{-q-1}, & m \text{ 是偶数} \\ \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(3n+q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) J_{q-1}(K|z|) (z/|z|)^{q-1}, & m \text{ 是奇数} \end{cases} + \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} - \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n+3q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) J_{q+1}(K|z|) (z/|z|)^{-q-1}, & m \text{ 是偶数} \\ \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(n+3q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) J_{q-1}(K|z|) (z/|z|)^{q-1}, & m \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{2}{K} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -H_{n+1}^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{n+1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(3n+q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) J_{q-1}(K|z|) (z/|z|)^{-q+1}, & m \text{ 是偶数} \\ - \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(3n+q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) J_{q+1}(K|z|) (z/|z|)^{q+1}, & m \text{ 是奇数} \end{cases} + \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n+3q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) J_{q-1}(K|z|) (z/|z|)^{-q+1}, & m \text{ 是偶数} \\ - \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(n+3q)/2} H_{n+q}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) J_{q+1}(K|z|) (z/|z|)^{q+1}, & m \text{ 是奇数} \end{cases} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入 $\tau_{rz} = \mu(e^{i\theta} \partial W / \partial z + e^{-i\theta} \partial W / \partial \bar{z})$ 中,利用边界条件(3)中的第3个边界条件,并在 $[0, 2\pi]$ 区间中进行傅立叶级数展开,得

$$\int_0^{2\pi} (e^{i\theta} \partial W / \partial z + e^{-i\theta} \partial W / \partial \bar{z}) e^{-il\theta} d\theta = 2/(K\mu) \int_0^{2\theta} f(\theta) e^{-il\theta} d\theta, (l = 0, \pm 1, \dots) \\ \text{继续整理得}$$

$$[H_{l-1}^{(1)}(KR) - H_{l+1}^{(1)}(KR)] A_l + \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\pi(3n-l)/2} H_{n-l}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) [J_{-l-1}(KR) - J_{-l+1}(KR)], & m \text{ 为偶数} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i\pi(3n-l)/2} H_{n-l}^{(1)}(K|Z_m^{(1)}|) [J_{l-1}(KR) - J_{l+1}(KR)], & m \text{ 为奇数} \end{cases} +$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\pi(n-3l)/2} H_{n-l}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) [J_{-l-1}(KR) - J_{-l+1}(KR)], \quad m \text{ 为偶数} \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i\pi(n+3l)/2} H_{n+l}^{(1)}(K|Z_m^{(2)}|) [J_{l-1}(KR) - J_{l+1}(KR)], \quad m \text{ 为奇数} \end{aligned} \right. = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\theta} \frac{2}{K\mu} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta \quad (7)$$

此外,剪切应力 $\tau_{\theta z}$ 与位移幅度 W 之间的关系为

$$\tau_{\theta z} = \mu \partial W / \partial r = i\mu (e^{i\theta} \partial W / \partial z - e^{-i\theta} \partial W / \partial \bar{z}) \quad (8)$$

本文主要讨论圆孔边界处的环向动应力集中系数 γ (DSCF),它主要反应了圆孔边界处环向应力的放大和变化情况。将(4)代入(8)中,并令 $z = R \cdot \exp(i\theta)$ 有

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \frac{iK\mu}{2} \left\{ e^{i\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{n-1} + \right. \\ & e^{i\theta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n [H_{n-(-1)^m}^{(1)}(K|z_1|) \times \\ & \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{(-1)^{m+1}} + H_{n-(-1)^m}^{(1)}(K|z_2|) \times \\ & \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{(-1)^{m+1}}] \left. - \frac{iK\mu}{2} \times \right. \\ & \left\{ -e^{-i\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^{n+1} + \right. \\ & e^{-i\theta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n [H_{n+(-1)^m}^{(1)}(K|z_1|) \times \\ & \left(\frac{z_1}{|z_1|} \right)^{(-1)^{m+1}} + H_{n+(-1)^m}^{(1)}(K|z_2|) \left(\frac{z_2}{|z_2|} \right)^{(-1)^{m+1}}] \left. \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

环向动应力集中系数 γ 可定义为

$$\gamma(\theta) = |\tau_{\theta z}| / \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| \quad (10)$$

具体计算时,可根据问题的精度要求,取足够多的级数项数,直到计算结果变化不大为止,这种计算特性主要是利用了汉克尔函数的衰减性,当虚源离开自由边界较远时,其对圆孔边界处的动应力集中系数影响就不大了。

2 算例与分析

(1) 本文算例给定的已知参数为 $\mu = 1.0 \times 10^9$ (N/m²), $K = 0.05, 0.3, 0.55, 0.8$; $R = 0.2$ (m); $h_1 = 0.5, h_2 = 0.8, f(\theta) = 2/(\sin \theta + 2)$, 计算结果如图 4 所示。

从图 4 可看出,在题设圆孔边界处载荷扰动下,圆孔边界环向动应力集中系数 γ 的变化曲线关于 y 轴是对称的,因为载荷本身关于 y 轴就是对称的,且环向应力最大值小于径向应力最大值,在点 90° 和 270° 处环向应力为零;随着无量纲波数增加,环向动应力集中系数 γ 增大。

(2) 与 (1) 的其他条件一样,只是 $f(\theta) =$

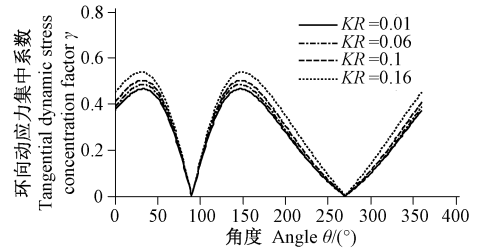


图 4 圆孔边界处环向动应力集中系数的变化

Fig. 4 Variations of Tangential dynamic stress concentration factor on the boundary of the circular cavity

$|\cos \theta| + 2$, 计算结果如图 5。

从计算结果来看,由于载荷仍然是关于垂直轴方向对称分布,所以圆孔边界处环向应力集中系数的变化曲线关于 $90^\circ - 270^\circ$ 线对称。最大数值幅度略低于 (1) 的结果,且同样随着无量纲波数增加,环向动应力集中系数 γ 增大。

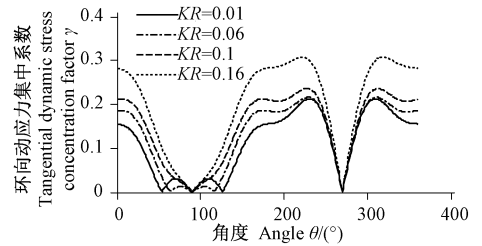


图 5 圆孔边界处环向动应力集中系数的变化

Fig. 5 Variations of Tangential dynamic stress concentration factor on the boundary of the circular cavity

(3) 与 (2) 的其他条件一样,只是 $h_1/R = h_2/R = 30$, 计算结果如图 6 所示。

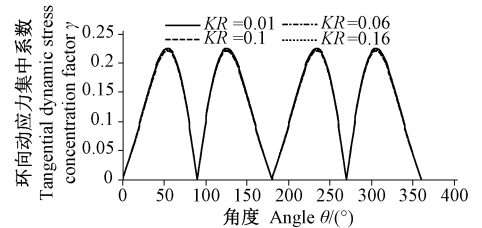


图 6 圆孔边界处环向动应力集中系数的变化

Fig. 6 Variations of Tangential dynamic stress concentration factor on the boundary of the circular cavity

从计算结果来看,当两条水平边界远离圆孔时,圆孔边界处的环向动应力集中系数关于 $0^\circ - 180^\circ$ 和 $90^\circ - 270^\circ$ 线均为对称,这相当于无穷大介质内圆孔的情形,实际上计算结果也的确如此,这说明当 h_1/R

$= h_2/R = 30$ 时,水平边界对圆孔边界处的环向动应力集中系数的影响可以忽略。

(4)再假设已知条件 $\mu = 1.0 \times 10^9, R = 2, h_1 = h_2 = 2.5, K = 0.15, 0.9, 1.65, 2.4, f(\theta) = |\sin \theta|$ 计算结果如图 7 所示。

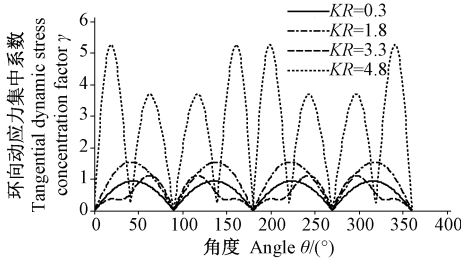


图 7 圆孔边界处环向动应力集中系数的变化

Fig. 7 Variations of Tangential dynamic stress concentration factor on the boundary of the circular cavity

从计算结果看,由于载荷分布的对称性和水平边界关于圆孔位置的对称性,所以圆孔边界处环向动应力集中系数关于 $0^\circ - 180^\circ$ 和 $90^\circ - 270^\circ$ 线也都是对称的,且由于圆孔比较靠近水平边界,因此圆孔边界处环向动应力集中程度较大,最大数值为 5.3。

3 结论

从上述理论分析和数值算例的结果,能够得到如下几点结论:

1)单层介质内圆孔边界处的环向动应力集中系数受水平边界的影响较为明显,圆孔靠近边界时,环向动应力集中较大;且随着无量纲波数的增加,变化幅度较明显。

2)对于层厚度相对于圆孔半径的比值较大的情形,圆孔边界处的环向应力集中程度的分析可按照无限大介质内圆孔的反平面弹性波散射的问题来进行。

参考文献 (References)

[1] BAO Yixing, MAO Zhaozhou. Diffraction and stress concentration of elastic wave [M]. Beijing: The publishing company of science, 1993:138-219.

[2] J. -F. Lu, A. Hanyga, 2004. Scattering of SH wave by a crack

terminating at the interface of a bi-material [J]. Computational Mechanics, 34:74-85.

[3] Wenpu Shi, Diankui Liu, Yongtao Song. Scattering of circular cavity in right-angle planar space to steady SH wave [J]. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2006, 27: 1619-1626.

[4] Ning Zhang, Yufeng Gao and Dayong Li, et al. : Scattering of SH waves induced by a symmetrical V-shaped canyon; a unified analytical solution [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Vol. 11, Issue 4, 2010, pp. 445-460. DOI:10.1007/s11803-012-0135-z.

[5] Shuzhi Lin, Faqiang Qiu, Diankui Liu: Scattering of SH waves by a scalene triangular hill [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Vol. 9, Issue 1, 2010:23-38. DOI:10.1007/s11803-009-8091-y.

[6] HAN Feng, WANG Guang-zheng, CHEN Han. Research on scattering of SH-waves on multiple hills and canyons [J]. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 34, Issue 4, pp.355-363. DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.04.004.

[7] V. W. Lee, M. E. Manoogian. Surface Motion above an Arbitrary Shape Underground Cavity for Incident SH Wave. European Earthquake Engineering 1995,8(1):3-11.

[8] Kirpichnikova N Ya, Svirkina L A, Philippov V B. Scattering of plane elastic waves on a small obstacle inside a layer [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2003, 117(2): 3928-3935.

[9] Emets V F, Kunets Ya I, Matus V V. Scattering of SH waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion [J]. Archive of Applied Mechanics, 2004, 73(11-12): 769-780.

[10] Luzon F, Ramire Z L, Sanchez-Sesma F J. Simulation of the seismic response of sedimentary basins with vertical constant-gradient velocity for incident SH-waves [J]. Pure and Applied Geophysics, 2004, 161(7): 1533-1547.

[11] 史文谱, 李 莉, 张春萍, 等. 弹性约束半空间内浅埋圆孔对 SH 波的散射 [J]. 机械强度, 2009, 31(5):740-746.

SHI WenPu, LI Li, ZHANG ChunPing, et al. Scattering of SH-wave to the circular cavity in the half-space with elastic constraint acting on the straight boundary [J]. Journal of Mechanical Strength, 2009, 31(5):740-746 (In Chinese) .

[12] 史文谱. 线弹性 SH 波散射理论及几个问题研究 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2013:202-206.

SHI WenPu. Scattering theory of linear elastic SH-waves and studies on some problems [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2013:202-206 (In Chinese) .