

基于非概率方法的医用机器人结构可靠性分析*

STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS OF MEDICAL ROBOT BASED ON NON-PROBABILISTIC MODEL

赵胜丽** 姜杉*** 高学生

(天津大学 机械工程学院, 天津 300072)

FANG XianChun JIANG Shan GAO XueSheng

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

摘要 核磁共振图像(MRI)导航的手术机器人因兼顾了核磁共振图像的清晰度高和机器人的稳定性、精度好等优点而成为医用机器人研究的前沿,而可靠性分析是保证医用机器人安全应用的重要手段之一。针对医用机器人系统缺乏足够实验数据的缺点,提出一种非概率密度凸集可靠性模型,以安全域与变量全域的质量比值来表示和度量关键部件的可靠性。通过与其他可靠性模型的计算数值比较,验证了该密度凸集可靠性模型的合理性。通过整机的有限元分析,找出系统的薄弱环节及关键结构部件。在此基础上,采用有限元—神经网络(FEM-ANN)的方法拟合关键部件的结构响应,进而根据所提出的凸集理论对该部件进行可靠性评价,实例验证了该模型的合理性与可行性,并为医用机器人整机的结构优化设计奠定了基础。

关键词 核磁共振图像(MRI) 医用机器人 有限元 结构可靠性 凸集模型

中图分类号 TH114

Abstract Due to the advantages of the high resolution of MRI and the high stability and precision of robot, MRI guided robot-assisted surgery is becoming a frontier of medical robot research, and the reliability analysis is considered as an indispensable procedure for the safe application of medical robot. On account of that the experimental data is insufficient in the field of surgical robot. Non-Probabilistic density convex model is put forward in this paper. The model takes the ratio of the mass of safe domain to the total mass of variable domain as the measurement of the reliability of key components. The rationality of this model is validated by comparing the numerical results with two other reliability models. According to the result of finite element analysis for robot prototype, the weak link and key component of system are found out. By using FEM-ANN method, the explicit function of approximation to the structural response of the key component is achieved. And then, the convex theory is applied to the structural analysis of the key component. The results show that the proposed method is reasonable and reliable, and lay the foundation of structural optimization for this medical robot.

Key words MRI; Medical robot; Finite element; Structural reliability; Convex model

Corresponding author: JIANG Shan, E-mail: shanjmri@tju.edu.cn

The project supported by the New Century Educational Talents Plan of Chinese Education Ministry (No. NCET-10-0625), and the State Key Laboratory Open Fund (No. MSV-2010-22).

Manuscript received 20131219, in revised form 20140307

引言

采用微创针刺手术进行近距离粒子放射性治疗是目前治疗前列腺癌的一种有效方法。传统的手动针刺手术不仅精度低,而且放射性粒子还会对临床医生造成辐射伤害。基于图像导向的机器人辅助手术不仅定位精度高、灵巧性强,而且对患者造成的创伤小、便于

术后恢复^[1-2]。其中,核磁共振图像(MRI)技术对软组织具有优良的分辨率和精确的几何特性^[3-4],可以精确地识别出肿瘤的大小和位置,应用于前列腺针刺手术实时图像导航可以将放射性粒子准确植入癌变部位。

在手术过程中,机器人的安全性和精确性至关重要。为此,系统可靠性的研究水平成为限制其投入临床应用的瓶颈之一。从可靠性工程角度看,在机器人

* 20131219 收到初稿, 20140307 收到修改稿。教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-10-0625), 国家重点实验室开放基金(MSV-2010-22)资助。

**赵胜丽, 女, 1989年08月生, 汉族, 天津大学硕士研究生。研究方向为国像导航机器人系统设计。

***姜杉, 女, 1973年03月生, 汉族, 博士, 天津大学副教授。研究方向为图像导向手术机器人。

的设计阶段就必须进行可靠性工作,针对机器人的不同环节如结构可靠性、运动可靠性、控制系统可靠性分别进行研究。其中,在结构可靠性研究方面,目前大多以概率模型方法^{[5]2189-2197}为基础进行研究。由于价格因素影响,试验数据匮乏,传统的方法是利用先验信息结合 Bayes 理论获得系统可靠度的后验分布分位点,即所谓 Bayes 下限^[6-7]。因为实际上先验分布都有偏差,且该方法受先验偏差影响较大,故当系统缺乏先验信息时无法使用。Elishakoff I^[8]研究了小样本可靠性评估中,结构可靠性计算结果对概率数据误差的高敏感度,概率数据的小误差可导致结构可靠性计算出现较大误差^[9-10],说明在概率分布假设基础上计算得到的可靠性结果是不可靠的。Ben-Haim Y^[11]采用非概率集合理论分析了工程中有界不确定数据。郭书祥等^[12]基于区间算法,提出一种非概率可靠性模型,但该模型方法对实验数据信息的利用率较低,计算结果相对保守。乔兴州^{[13]2-3}构建了一种基于椭球凸集的结构非概率可靠性模型。Luo Y 和 Kang Z^[14]根据相关性对参数进行分组,建立了超椭球凸集模型,扩展了椭球凸集模型的使用范围。周凌等^[15]指出了凸集可靠度指标表征可靠性的片面性,提出了多重超椭球模型指标,但计算较为复杂。

综上所述,概率模型方法不适合处理实际工程中缺乏样本数据的情况,而非概率椭球凸集模型,是在均匀分布的假设基础上,显然没有充分利用已知的样本信息,其计算结果也相对保守。由于实际工程中数据的区间分布形式并非理想的均匀分布,而是在给定区间范围内具有一定分布中心。为了充分利用获得的样本信息和边界条件,本文针对自主研发的核磁共振图像导航的医用机器人,提出一种密度凸集模型方法,即在已有的均匀凸集模型的基础上,合理地选择密度分布形式模拟区间变量的分布,据此进行可靠性计算以获得较为准确的结果,进而为机器人的医疗使用提供一个可靠性保证。

1 机器人系统设计介绍

本文自主研发的医用机器人由于受到封闭式核磁共振仪空间和强磁场的影响,故在其本体机构材料、空间尺寸、驱动方式等方面都有一定的要求,并且要求达到一定的可靠性指标。

机器人的实物如图 1 所示,整机的尺寸为 370 mm × 275 mm × 275 mm,放在封闭式核磁共振仪中,如图 2 所示。结构本体采用聚甲醛材料进行制造。机器人由三部分构成:平动摇摆模块、垂直俯仰模块以及针刺模块。前二者采用核磁兼容气缸(型号 AC 13270-3)驱动,可实现大负载的平移和摆动,后者采用

核磁兼容的超声波电机(型号 PUMR40)驱动,实现小负载的针刺手术,光学编码器(型号 MR318)可实现位姿信息的反馈。

可靠性设计要求设计出的机器人整机及各子系统达到规定的各项可靠性指标,其中末端执行器的位置精度应达到不大于 1 mm,机器人的关键部件的挠度不大于 0.05 mm,机器人结构强度可靠度不小于 0.95。

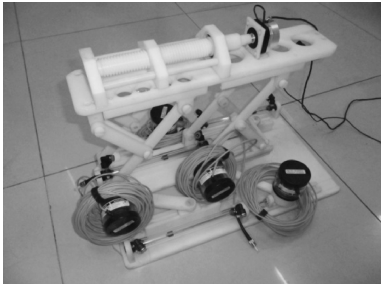


图 1 机器人实物图
Fig. 1 The robot prototype

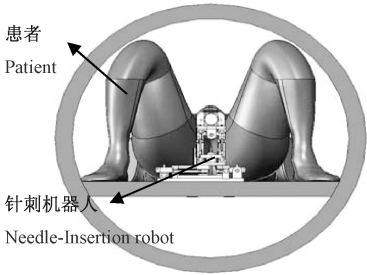


图 2 核磁仪内相对位置示意图
Fig. 2 Spatial distribution schematic diagram inside MRI equipment

2 密度凸集模型

密度凸集模型是用密度分布取代均匀分布的假设,即凸集内部变量服从密度函数分布,凸集内部某点的密度表征参数取值落在该点附近的可能性。与概率分布变量相比,密度凸集模型中不确定变量的界限更容易确定,不确定结构变量可处理为由下界和上界界定的区间变量。例如,尺寸变量区间可以由公差带确定,载荷变量区间可以由极限状态确定。

2.1 基于密度凸集模型的可靠度指标

定义区间变量 $s_i \in [\underline{s}_i, \overline{s}_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\underline{s}_i$ 和 $\overline{s}_i$ 分别代表 s_i 的上界限和下界限,定义 $v_i = \frac{\underline{s}_i + \overline{s}_i}{2}$ 为变量 s_i 的均值. 定义 $u_i = \frac{\overline{s}_i - \underline{s}_i}{2}$ 为变量 s_i 的离差。

令 $\mathbf{s} = [s_1 s_2 \cdots s_n]^T$, $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \cdots v_n]^T$, $\mathbf{u} = [u_1 u_2 \cdots u_n]^T$, 则

$$\mathbf{s} \in [\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{u}] =$$

$$\{s \mid s_i \in [v_i - u_i, v_i + u_i], i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

在实际情况下,各区间变量往往不会同时处于边界上。因此,若采用区间模型进行结构设计,结果往往过于保守。鉴于此,椭球模型的方法更加贴近实际。根据椭球模型理论^{[12]2},采用多维椭球体 E 限定不确定参数的可能取值,即

$$s \in E = \{s \mid (s - v)^T W (s - v) \leq 1\} \quad (2)$$

$W \in R^{n \times n}$ 为椭球的特征矩阵,它是一个正定矩阵,表征了椭球的方位。假设各变量独立,则 W 简化为对角矩阵,且 $W_{ii} = 1/u_i^2$ 。则不确定参数的椭球区间可以简化为

$$e \in E = \{e \mid e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \leq 1\}$$

$$e_i = \frac{s_i - v_i}{u_i} \in [-1, 1], i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

设结构极限状态面为

$$g(s) = 0 \quad (4)$$

根据泰勒级数将 $g(s)$ 在设计点 s_m 处展开

$$g(s) \approx g(s_m) + \left(\frac{\partial g}{\partial s} \right)^T \bigg|_{s=s_m} (s - s_m) = J^T s + k \quad (5)$$

其中, $J = [J_1 J_2 \dots J_n]^T = \left(\frac{\partial g}{\partial s} \right)^T \bigg|_{s=s_m}$, $k = - \left(\frac{\partial g}{\partial s} \right)^T \bigg|_{s=s_m} s_m$ 。

极限状态平面将变量域 E 分割为安全域 E_s ($G(e) > 0$) 和失效域 E_f ($G(e) < 0$)。根据以往椭球模型^{[12]2},将安全域与变量域的体积大小定义为结构可靠度。即

$$R = \begin{cases} \beta & \beta \geq 1 \\ \frac{V_s}{V} & 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (6)$$

$\beta = \frac{k}{\|J\|}$ 为可靠度指数,大小为设计点到极限状

$$R = \begin{cases} \beta & \beta \geq 1 \\ \frac{\int_E \dots \int \mu(e_1, e_2, \dots, e_n) dV - \int_{E_f} \dots \int \mu(e_1, e_2, \dots, e_n) dV}{\int_E \dots \int \mu(e_1, e_2, \dots, e_n) dV} & 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (9)$$

2.2 密度凸集模型正确性验证

为了比较三种可靠度模型方法(概率法、均匀凸集法、密度凸集法)间的关系,分析各方法可靠度值随可靠度指数 β 的变化规律,如图 3 所示。

其中,概率可靠度的参数按 3σ 法则确定,(如 $\mu_s = S^c, \sigma_s = S'/3$),即假设所有变量都服从正态分布,

态面 $g(s) = 0$ 的距离。若 $\beta < 1$,则失效域非空,存在失效的可能性;若 $\beta > 1$ 则结构完全可靠。

由于该模型并未考虑椭球内部的实际分布情况,且没有充分利用已有的数据信息,其评价结果是偏保守的。本文提出密度凸集分布函数,合理地模拟区间参数的分布情况

$$\mu(e) = \begin{cases} 0 & \beta \geq 1 \\ (1 + \|e^*\|)^2 - \|e - e^*\|^2 & 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $e^* = [e_1^* e_2^* \dots e_n^*]^T$ 为样本数据中心, $e^* = \frac{e_1^* + e_2^* + \dots + e_n^*}{n}$, e^* 是通过少量样本信息确定的,受到成本和测量手段限制,往往只能进行有限次的测量或者试验,例如,实际有限次样机制造中某一零件某个尺寸参数第 i 次加工误差可作为一个样本数据 e_i^* , $e_1^* \sim e_n^*$ 即构成某个尺寸参数的少量样本数据, $e^* = 0$ 表示没有样本数据。

密度凸集分布函数有两个重要特征:

1) $\mu(e) \geq 0$, 因为 $\|e - e^*\|^2 \leq \|e\|^2 + \|e^*\|^2 \leq 1 + \|e^*\|^2 \leq (1 + \|e^*\|)^2$, 表明椭球 E 内部密度函数是有意义的。

2) $\mu(e)$ 和 $\|e - e^*\|$ 成负相关, $\|e - e^*\|$ 是样本点到样本数据中心的距离,离样本数据中心的距离越近,样本点发生的几率就越大。

本文采用安全域 E_s 的质量与变量全域 E 的质量的比作为可靠度指标,即

$$R = \begin{cases} \beta & \beta \geq 1 \\ \frac{m - m_f}{m} & 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (8)$$

式中, m 是变量全域 E 的质量, m_f 是失效域 E_f 的质量,即

参照文献[5]²¹⁸⁹⁻²¹⁹⁷中一次二阶矩法: $\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} =$

$\frac{M(\mu_s, \mu_x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_s^2 + (\sigma x_i \frac{\partial M}{\partial x_i})_{\mu_x}^2}}$, 失效概率 $P_f = 1 - \Phi(\beta)$; 均匀凸集模型可靠度按照文献[11]⁶⁸³公式计算; 密度凸集可靠度按照式(8)、式(9)计算。

图 3 为可靠度计算值随 β 的变化曲线图,可以发现可靠度值随着 β 单调增加,并且密度凸集法的计算结果介于均匀凸集模型和概率方法模型的计算结果之间,尤其当 β 在 $[0.3, 0.7]$ 区间,其可靠度计算结果有明显差异;密度凸集法的计算值相对于概率法要保守一些,即若按照概率可靠度计算值满足强度要求,而按照密度凸集模型计算的可靠度未必满足要求,这是因为密度凸集模型的基础是少样本数据,而非理想化的通过大量实验统计获得的正态分布数据,所以计算结果相对于概率模型保守,这是符合客观事实的;而均匀凸集模型将凸集内部变量处理为均匀分布变量,并不符合实际情况,也没有充分利用小样本数据信息,故其计算结果最为保守。

从图 3 中不同维数下三种可靠度模型计算差值 Δ 随 β 的变化,其中 Δ_1 、 Δ_2 分别为二维情形下,密度凸集可靠度与概率可靠度、均匀凸集可靠度的差值, Δ_3 、 Δ_4 分别为三维情形下,密度凸集可靠度与概率可靠度、均匀凸集可靠度的差值,可以看出随着变量的维数增加,三种方法的可靠度的差距在减小,说明了在变量维数较高的情形下,这三种方法具有等效性。

综上所述,密度凸集模型更为合理地模拟了实际变量参数的分布情形,计算结果也更为客观。且该方法计算简单、结果较为精确,尤其适合在基于小样本数据的可靠性研究中使用。

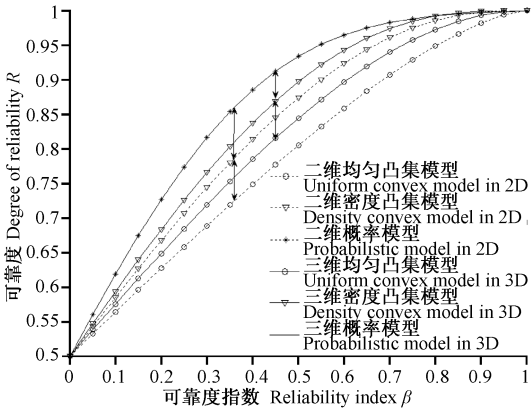


图 3 基于不同模型的可靠度计算值随 β 的变化曲线图
Fig. 3 Curve of computed reliability value based on different models versus β

3 MRI 手术机器人关键零件结构可靠性分析

机器人关键零部件的性能优劣是影响机器人运动精度和整体可靠性的重要因素,为此采用有限元方法对机器人整机进行静力学分析,如图 4 所示。在工作空间范围内,中层长杆的铰链孔附近是整机产生应力最大的区域,是系统的薄弱环节。当机器人运行达到如图 4 所示位姿时,长杆铰链孔处应力值达到最大值。

此外,在中层长杆铰链孔处还有应力集中现象,故该零件被定为影响机器人整体可靠性的关键零件。该零件受力分析如图 5 所示,需要说明的是该零件在三点处受到的载荷的方向和大小随着机器人位姿的改变而不断变化。为此,将手术机器人的三维模型导入到 Adams 软件中进行动态载荷分析。运动的轨迹如图 5 所示,滑块在导轨上运动,速度为 1 mm/s。当滑块从 S_1 运行至 S_2 位置,相应的连杆末端由 P_1 运动至 P_2 位置。



图 4 整机静力学分析
Fig. 4 Static analysis of the robot

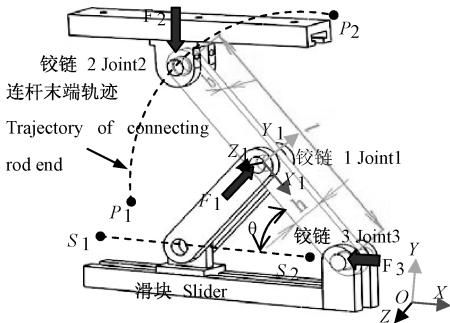


图 5 机器人关键零件
Fig. 5 Key component of the robot

经模拟仿真可获得长杆三铰链 Joint1、Joint2、Joint3 在绝对坐标系 XOY 下的载荷序列,为方便分析,在长杆上建立运动坐标系 $X_1O_1Y_1$,并根据几何关系和运动学关系,将绝对坐标系下 Joint1 受到的载荷转换为运动坐标系 $X_1O_1Y_1$ 下的载荷。在坐标系 $X_1O_1Y_1$ 下 Joint1 载荷分量形式如图 6 所示,随着位姿的变化,Joint1 处压力角逐渐增大, Y_1 方向载荷分量递减, X_1 方向载荷分量递增,且运动的初始位置处载荷合力最大。

3.1 静力学应力分析

获得长连杆的受力后,为获得其应力,对它进行有限元分析。该材料弹性模量 2 600 MPa,泊松比 0.35,选取网格单元类型为 SOLID 95。对该长杆的两端孔施加柱面约束,在 Joint1 铰链孔面上添加 XY 两个方向上的如图 6 中的面载荷。该长杆的设计几何参数见表 1。选取宽度值 h 和厚度值 b 作为设计变量,设计变量

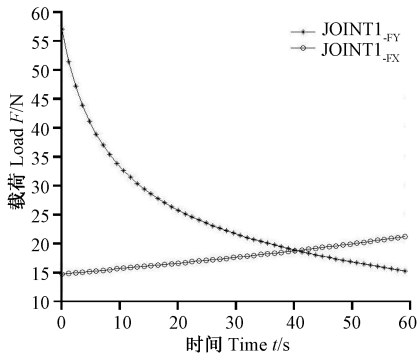


图 6 长杆铰链 Joint1 处载荷规律

Fig.6 Load curve of long connecting rod at joint1

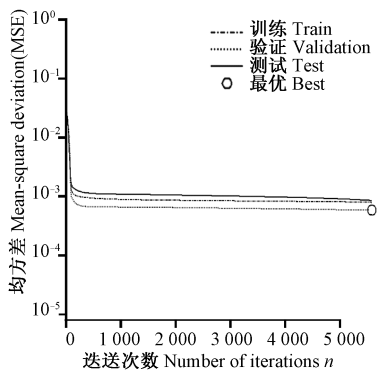


图 8 神经网络训练过程

Fig.8 Process of training ANN

域为 $9\text{ mm} \leq h \leq 18\text{ mm}$, $4\text{ mm} \leq b \leq 8\text{ mm}$, 其余尺寸按照设计标称值设置, 随机抽样进行有限元仿真, 获得 10^4 个最大应力值样本点。采用 BP 神经网络对样本进行快速高精度响应面拟合, 同时获得应力响应面的显式表达。应力响应面如图 7 所示, 神经网络训练过程如图 8 所示。

表 1 长杆设计尺寸

Tab.1 Design parameter of long connecting rod

长度	厚度	宽度	铰链孔径
Length l/mm	Thickness b/mm	Width h/mm	Hole radius r/mm
150	8	20	5

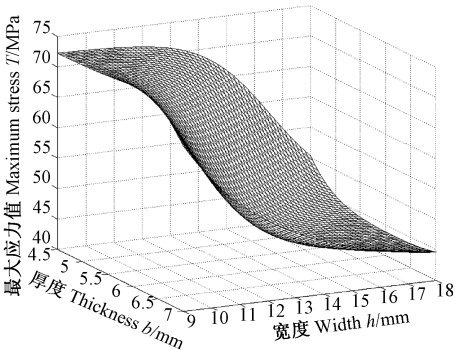


图 7 连杆最大应力响应曲面

Fig.7 Response surface of maximum stress of connecting rod

3.2 可靠度计算结果分析

按照凸集模型理论, 对于无法进行足够的应力测量试验和零件强度测试试验的场合, 可将各变量处理为区间变量。故将设计变量 h 、 b 按照自由尺寸公差 IT14 精度取为区间变量; 材料的综合强度值 S 根据通用级聚甲醛(杜邦 POM 525GR)的抗拉强度, 取为区间变量 $[50, 60]$ MPa。在三维变量域 $[Shb]$ 中, 按照密度凸集理论进行可靠度计算, 并确定结构安全域 ($R \geq 0.98$)。如图 9 所示, 当长杆的设计尺寸处于安全域时满足可靠性要求, 尤其当 $h \geq 16.5\text{ mm}$, $b \geq 5.5\text{ mm}$ 时, 达到理论上绝对安全水平。可见机器人关键部件在当前设计尺寸 ($20\text{ mm} \times 8\text{ mm}$) 下具有非常高的可靠度,

且具有一定的安全裕量。

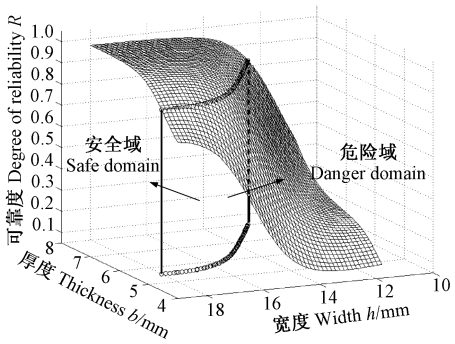


图 9 可靠度曲面

Fig.9 Surface of reliability

进一步将概率可靠度计算值 (R_1) 与密度凸集可靠度计算值 (R_2)、均匀凸集法可靠度计算值 (R_3) 进行比较, 计算参数及部分结果如表 2 所示。在小样本可靠性研究中, 概率模型方法将内部变量处理为服从极端理想化的概率分布的形式 (如正态分布、威布尔分布等), 与真值比较其计算结果往往偏大, 而均匀凸集模型将内部变量处理为均匀分布的形式, 其计算结果是偏小的。从表 2 可以看出, 在此算例中密度凸集模型表现出了非常明显的“趋中性”, 即密度凸集法的计算值能够平稳地介于其余两种方法计算结果之间, 说

表 2 计算过程参数及可靠度值

Tab.2 Parameters of calculation process and value of reliability

h/mm	S^1/MPa	R^1/MPa	β	R_1	R_2	R_3
12	60.282 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	-0.027	0.468	0.477	0.483
12.5	58.772 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.118	0.638	0.599	0.575
13	57.400 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.250	0.773	0.706	0.657
13.5	56.989 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.290	0.808	0.736	0.682
14	55.127 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.470	0.921	0.856	0.788
14.5	54.599 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.521	0.941	0.885	0.816
15	53.032 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.674	0.978	0.951	0.894
15.5	51.827 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.791	0.991	0.983	0.945
16	51.146 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	0.858	0.995	0.993	0.969
16.5	48.387 ($1 \pm 5\%$)	[50, 70]	1.1287	0.999	1	1

明了密度分布函数能够更为合理地模拟凸集内部变量分布形式,这样的性质保证了计算结果的准确性和可靠性,即在小样本数据信息的基础上,该法更加贴近真实值。

4 结论

在缺乏充分实验数据的情况下,采用非概率模型方法处理结构可靠性问题比采用概率模型方法更加准确、有效。本文针对医用机器人可靠性问题进行研究,得出如下结论:

1) 针对小样本条件下医用机器人的可靠性评估,提出了可靠度密度凸集模型。在相同变量条件下,通过不同算法的数值比较,说明和验证了该模型的合理性。

2) 采用 FEM-ANN 方法结合密度凸集模型理论,对 MRI 手术机器人的关键部件进行结构可靠性评估,验证了该机器人结构的高可靠性,获得设计安全域,为尺寸优化奠定基础。

3) 实例结果表明,在处理实际研究中的小样本问题时,即在所掌握的数据信息不充分的情形下,该方法是一种计算相对简单而计算结果可靠的有效方法。

参考文献 (References)

- [1] 王田苗,刘文勇,胡磊. 医用机器人与计算机辅助手术 MRCAS 进展[J]. 中国生物医学工程学报,2008,27(1):137-145.
WANG TianMiao, LIU WenYong, HU Lei. Progresses of medical robotics and computer assisted surgery (MRCAS) [J]. Chinese Journal of Biomedical Engineering, 2008, 27(1): 137-145 (In Chinese).
- [2] Dai Jiangsheng. Surgical robotics and its development and progress [J]. Robotica, 2010, 28: 161.
- [3] Friedrich A, Leo P, Alexandre P, et al. Value of magnetic resonance imaging in prostate cancer diagnosis[J]. World Journal of Urology, 2007, 25(4): 351-359.
- [4] 洪在地,负超,赵磊,等. 核磁共振兼容手术机器人研究[J]. 中国生物医学工程学报,2008,27(4):621-629.
HONG ZaiDi, YUN Chao, ZHAO Lei, et al. Summary on MR-compatible surgical robot [J]. Chinese Journal of Biomedical Engineering, 2008, 27(4): 621-629 (In Chinese).
- [5] Yangfang Z, Yanlin Z, Yiming Z. Reliability sensitivity based on first-order reliability method [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 2011, 225(C9): 2189-2197.
- [6] Abdel-wahid A R, Winterbottom A. The approximation of system reliability posterior distributions[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1987, 16: 267-275.
- [7] 赵勇辉,程侃,于丹. 利用先验信息修正经典限的可靠性评估方法[J]. 系统工程理论与实践,2002, 5: 1038-1041.
ZHAO YongHui, CHENG Kai, YU Dan. Reliability evaluation based on classical limit and priori information [J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2002, 5: 1038-1041 (In Chinese).
- [8] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: From A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling[J]. Computers & Structures, 1995, 56(6): 871-895.
- [9] 张新锋,赵彦,施浒立. 基于凸集的结构非概率可靠性度量研究[J]. 机械强度,2007,29(4):589-592.
ZHANG XinFeng, ZHAO Yan, SHI HuLi. Study of non-probabilistic measure based on convex model [J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(4): 589-592 (In Chinese).
- [10] 马景槐,朱福先. 区间模型结构非概率可靠性度量研究[J]. 机械强度,2012,34(1):048-052.
MA JingHuai, ZHU FuXian. Study of non-probabilistic reliability measures of structures based on interval[J]. Journal of Mechanical Strength. 2012, 34(1): 048-052 (In Chinese).
- [11] Ben-Haim Y. Convex models of uncertainty in radial pulse buckling of shells[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(3): 683.
- [12] 郭书祥,吕震宙,冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报,2001,18(1):56-60.
GUO Shuxiang, LV ZhengZhou, FENG YuanSheng. A non-probabilistic model of structural reliability based on interval analysis [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics. 2001, 18(1): 56-60 (In Chinese).
- [13] 乔心州,仇原鹰,孔宪光. 一种基于椭圆凸集的结构非概率可靠性模型[J]. 工程力学,2009,26(11):203-208.
QIAO XinZhou, QIU YuanYing, KONG XianGuang. A non-probabilistic model of structural reliability based on ellipsoidal convex model[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(11): 203-208 (In Chinese).
- [14] Luo Yangjun, Kang Zhan, Luo Zhen, et al. Continuum topology optimization with non-probabilistic reliability constraints based on multi-ellipsoid convex model [J]. Structure Multidiscipline Optimization, 2009, 39(3): 297-310.
- [15] 周凌,安伟光,贾宏光. 超椭圆凸集集合可靠性综合指标定义及求解方法[J]. 航空学报,2011,32(11):2025-2035.
ZHOU Ling, AN WeiGuang, JIA HongGuang. Definition and solution of reliability comprehensive index of super-ellipsoid convex set[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 39(3): 279-310 (In Chinese).