

基于 Mindlin 理论厚圆环弯曲振动研究^{*}

RESEARCH OF THICK RING BENDING VIBRATION BASED ON MINDLIN THEORY

张宁宁^{**1} 吴胜举^{***2}

(1. 渭南师范学院 物理与电气工程学院, 渭南 714000)

(2. 陕西师范大学 应用声学研究所, 西安 710062)

ZHANG NingNing¹ WU ShengJu²

(1. *Physical and Electrical Engineering Institute, Weinan Normal University, Weinan 714000, China*)

(2. *Shaanxi Normal University Institute of Applied Acoustics, Xi'an 710062, China*)

摘要 基于 Mindlin 理论从声学应用角度,推导了中厚圆环弯曲振动的横向与径向位移解析表达式,得到了四种不同边界条件下的频率方程,进行数值求解得到的频率与有限元模拟结果基本相符,结论对厚圆环及厚盘的弯曲振动辐射器的设计提供理论参考和频率调试依据。

关键词 Mindlin 理论 厚圆环 频率方程 弯曲振动

中图分类号 TH113

Abstract The transverse and radial displacement in the analytic expressions of thick ring bending vibration are deduced based on Mindlin theory from the application point of view by Acoustics. Four kinds of different boundary conditions the frequency equation was obtained and The numerical solution of the obtained frequency and finite element simulation results are consistent with the basic. The conclusion on the design of thick ring and a thick disc flexural vibration radiator provides the theory reference and the frequency of debugging basis.

Key words Mindlin theory; Thick ring; The frequency equation; The bending vibration

Corresponding author: ZHANG NingNing, E-mail: zhangning7892@163.com

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 11074158), and the Plan Project Science and Technology Department of Shaanxi Province (No. 2012JM1005), and the Natural Science Projects of Department of Education in Shaanxi Province (No. 2013JK0615).

Manuscript received 20140928, in revised form 20141029

引言

弯曲振动圆盘和圆环具有大辐射面积特点在超声中得到了广泛的应用。在高频大功率声辐射条件下,薄盘的机械强度显得不足,这时厚圆盘是个不错的选择,因为它横向尺寸不大且频率又高。板振动的经典理论是基于 Kirchhoff 假设基础上的,并忽略了转动惯量的影响,随着板的厚跨比(大于 1/5)的增大,经典理论的局限性将明显增大,因此,必须重新探讨和研究经典理论的基本假定,并建立相应的新理论即厚板理论,考虑剪切、挤压和转动惯量的效应^[1-3]。对圆盘的弯曲振动特性及其辐射声场的研究,目前大都采用薄

板理论^[4-8]。从工程力学角度研究,目前对于厚板理论,最为著名的是 Reissner 理论和 Mindlin 理论,文献[9-13]基于上述理论也从理论和工程力学的角度做了研究。文献[14]对厚圆盘基频振动声场指向性进行研究,计算结果表明,对几何尺寸相同的厚圆盘,在基频振动模式下,固定边界下弯振厚圆盘辐射声场指向性最尖锐,简支居中,自由边界盘的辐射声场指向性不好。文献[15]潘晓娟应用 Mindlin 理论对厚圆盘弯曲振动进行理论、数值及实验研究,其结果基本一致。厚圆环是超声衍齿的关键部件,文献[16]分析周边简支圆板在磁场中的非线性随机振动问题,但目前关于厚圆环的弯曲振动特性研究较少。文献[17]杨杰研究

^{*} 20140928 收到初稿, 20141029 收到修改稿。国家自然科学基金资助项目 (11074158); 陕西省科技厅计划项目 (2012JM1005); 陕西省教育厅自然科学专项 (2013JK0615) 资助。

^{**} 张宁宁, 女, 1978 年 9 月生, 陕西西安人, 渭南师范学院讲师, 硕士。研究方向为功率超声及声学测量。

^{***} 吴胜举, 男, 1955 年 6 月生, 山东龙口人, 陕西师范大学副教授, 研究生导师, 研究方向为声学测量、功率超声。

了域内同心环支 Mindlin 中厚圆环的弯曲振动。大功率的声学应用不但关心厚板的结构振动特性, 还希望在一定的边界条件下, 能给出其相应的频率方程和位移解析解, 以利于声学设计和计算声场特别对大功率辐射器其关键部件的设计及应用。本文完成了这一工作, 基于 Mindlin 理论推导了中厚圆环在四种不同边界条件下的横向与径向位移及频率方程解析表达式, 数值计算得到的频率与有限元模拟结果基本相符, 其结论对厚圆环及厚盘的弯曲振动辐射器的设计及应用提供理论参考和依据。

1 厚圆环弯曲振动

1.1 Mindlin 厚板振动理论

设厚圆环内外半径为 b, a , 厚度为 h , 上下表面不会受切向力。取柱坐标 (r, θ, z) 的原点与盘面中心重合, u_r, u_θ, ω 分别表示盘质点径向、切向、 z 向的位移。Mindlin 理论考虑横向剪切变形和转动惯量的影响时, 质点位移有如下形式

$$u_r = z\psi_r(r, \theta, t), u_\theta = z\psi_\theta(r, \theta, t), \bar{\omega}(r, \theta, t) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \psi_r = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \psi_\theta = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_1}{r \partial \theta} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_2}{r \partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial r} \\ \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \end{cases} \quad (2)$$

位移函数 $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, H$ 分别满足

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \delta_1^2) \bar{\omega}_1 &= 0, (\nabla^2 + \delta_2^2) \bar{\omega}_2 = 0 \\ (\nabla^2 + p^2) H &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\delta_1^2, \delta_2^2 = \frac{1}{2} \delta_0^4 (R + S \pm [(R - S)^2 + 4\delta_0^4]^{1/2})$, σ_1 ,

$$\sigma_2 = (\delta_1^2, \delta_2^2) (R\delta_0^4 - S^{-1}), p^2 = \frac{2(R\delta_0^4 - S^{-1})}{(1 - \nu)}, R =$$

$h^2/12, S = D/k^2 Gh, \delta_0^4 = \rho\omega^2 h/D$, 式中, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$, $k^2 = \pi/12$. ρ, ω, D 分别为厚圆环的密度、角频率、弯曲刚度常数, R, S 表示转动惯量和横向剪切变形的影响, ν 为泊松比。

弯矩 M_r, M_θ , 扭矩 $M_{r\theta}$, 以及 Q_r, Q_θ 的表达式为

$$\begin{cases} M_r = D \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} (\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}) \right] \\ M_\theta = D \left[\frac{1}{r} (\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}) + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right] \\ M_{r\theta} = \frac{D}{2} (1 - \nu) \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} \right] \\ Q_r = k^2 Gh (\psi_r + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r}) \\ Q_\theta = k^2 Gh (\psi_\theta + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta}) \end{cases} \quad (4)$$

1.2 厚圆环在不同边界条件下的弯曲振动频率方程

对于圆环受力是关于 z 轴是对称的, 圆环的弯曲振动也是对称与 z 轴, 因此可不考虑 θ 方向上的位移, 所以

$$u_r = z\psi_r(r, t), u_\theta = z\psi_\theta(r, t), \bar{\omega}(r, t) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \psi_r = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial r} \\ \psi_\theta = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_1}{r \partial \theta} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial \bar{\omega}_2}{r \partial \theta} \\ \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} M_r = D \left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \psi_r \right] \\ Q_r = k^2 Gh (\psi_r + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r}) \end{cases} \quad (7)$$

式(3)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial r} + \delta_1^2 \bar{\omega}_1 = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{\omega}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial r} + \delta_2^2 \bar{\omega}_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式(8)的解为

$$\bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^2 A_i J_0(\delta_i r) + \sum_{i=1}^2 B_i Y_0(\delta_i r), (i = 1, 2) \quad (9)$$

式中, $J_0(\delta_i r)$ 为零阶贝塞尔函数, $Y_0(\delta_i r)$, 为零阶诺伊曼函数, A_1, A_2, B_1, B_2 为由圆环边界条件决定的待定常数。

将式(9)代入式(6), 得

$$\begin{aligned} \psi_r &= \delta_1 (1 - \sigma_1) [A_1 J_1(\delta_1 r) + B_1 N_1(\delta_1 r)] + \\ &\quad \delta_2 (1 - \sigma_2) [A_2 J_1(\delta_2 r) + B_2 N_1(\delta_2 r)] \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\bar{\omega} = A_1 J_0(\delta_1 r) + B_1 Y_0(\delta_1 r) + A_2 J_0(\delta_2 r) + B_2 Y_0(\delta_2 r) \quad (10b)$$

将式(10a)(10b)代入(7)可得

$$\begin{cases} M_r = \left\{ \sum_{i=1}^2 A_i (\sigma_i - 1) \left[J_0''(\delta_i, r) + \frac{\nu}{r} J_0'(\delta_i, r) \right] \right\} + \\ \left\{ \sum_{i=1}^2 B_i (\sigma_i - 1) \left[Y_0''(\delta_i, r) + \frac{\nu}{r} Y_0'(\delta_i, r) \right] \right\} \\ Q_r = k^2 Gh \left\{ \sum_{i=1}^2 A_i \sigma_i J_0'(\delta_i, r) + B_i Y_0'(\delta_i, r) \right\} \end{cases} \quad (11)$$

1.2.1 内外自由边界

内外自由条件下, 圆环边界处的弯矩与剪力为零即

$$M_{r=a} = Q_{r=a} = M_{r=b} = Q_{r=b} = 0 \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)可得如下表达式

$$A_1(\sigma_1 - 1)[J_0''(\delta_1, a) + \frac{\nu}{r}J_0'(\delta_1, a)] + A_2(\sigma_2 - 1)[J_0''(\delta_2, a) + \frac{\nu}{r}J_0'(\delta_2, a)] +$$
$$B_1(\sigma_1 - 1)[Y_0''(\delta_1, a) + \frac{\nu}{r}Y_0'(\delta_1, a)] + B_2(\sigma_2 - 1)[Y_0''(\delta_2, a) + \frac{\nu}{r}Y_0'(\delta_2, a)] = 0 \quad (13)$$

$$A_1(\sigma_1 - 1)[J_0''(\delta_1, b) + \frac{\nu}{r}J_0'(\delta_1, b)] + A_2(\sigma_2 - 1)[J_0''(\delta_2, b) + \frac{\nu}{r}J_0'(\delta_2, b)] +$$
$$B_1(\sigma_1 - 1)[Y_0''(\delta_1, b) + \frac{\nu}{r}Y_0'(\delta_1, b)] + B_2(\sigma_2 - 1)[Y_0''(\delta_2, b) + \frac{\nu}{r}Y_0'(\delta_2, b)] = 0 \quad (14)$$

$$A_1\sigma_1J_0'(\delta_1, a) + A_2\sigma_2J_0'(\delta_2, a) + B_1Y_0'(\delta_1, a) + B_2Y_0'(\delta_2, a) = 0$$

(15)

$$A_1\sigma_1J_0'(\delta_1, b) + A_2\sigma_2J_0'(\delta_2, b) + B_1Y_0'(\delta_1, b) + B_2Y_0'(\delta_2, b) = 0$$

(16)

1. 2. 2 内外边界固定

内外固定边界条件下,圆环边界处横向位移及其导数为零,由式(9)可得

$$A_1J_0(\delta_1, a) + A_2J_0(\delta_2, a) + B_1Y_0(\delta_1, a) +$$
$$B_2Y_0(\delta_2, a) = 0$$

(17)

$$A_1J_0(\delta_1, b) + A_2J_0(\delta_2, b) + B_1Y_0(\delta_1, b) +$$
$$B_2Y_0(\delta_2, b) = 0$$

(18)

$$A_1J_0'(\delta_1, a) + A_2J_0'(\delta_2, a) + B_1Y_0'(\delta_1, a) +$$
$$B_2Y_0'(\delta_2, a) = 0$$

(19)

$$A_1J_0'(\delta_1, b) + A_2J_0'(\delta_2, b) + B_1Y_0'(\delta_1, b) +$$
$$B_2Y_0'(\delta_2, b) = 0$$

(20)

1. 2. 3 内自由外固定和内固定外自由

内边界自由条件为:内边界处的弯矩与剪力为零;外边界固定条件为:圆环外边界处横向位移及其导数为零。由式(9)和式(11)可得,由式(14)式(16)式(17)式(19)所组合成的方程组。

内边界固定条件为:圆环内边界处横向位移及其导数为零;外边界自由条件为:外边界处的弯矩与剪力为零。由式(9)和式(11)可得,由式(13)式(15)式(18)式(20)所组合成的方程组。

上述不同边界条件下,将分别有由式(13) – 式(16);式(17) – 式(20);式(14)式(16)式(17)式(19);式(13)式(15)式(18)式(20)各自四个方程组成的方程组,将其可看作关于待定系数 A_1, A_2, B_1, B_2

的方程组,因为待定系数不全为零,所以要得到非零解,上述四个方程系数行列式等于零

$$\begin{vmatrix} C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} \\ C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24} \\ C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{34} \\ C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{44} \end{vmatrix} = 0$$

(21)

式(21)即为不同边界条件下的中厚圆环的频率方程,其每个都为超越方程,因此采用数值法求解。当圆环的材料参数与几何参数确定,则可通过式(21)可得相应频率。将求出的频率代入式(13) – 式(16)求出系数 A_1, A_2, B_1, B_2 ,再将结果代回式(10),即可得圆环径向与横向位移。

2 数值计算

为了验证以上在不同边界条件下厚圆环弯曲振动频率方程的解析解,利用有限元法计算了不同边界条件下厚圆环弯曲振动前三阶频率,并与数值计算和薄板理论计算结果进行比较。取圆环材料为 45 号钢,密度为 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,泊松比 $\nu = 0.28$,弹性模量 $E = 21.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,剪切模量 $G = 8.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 。内外半径为 8 mm、25 mm,厚度 h 可变,如表 1 所示,其中 f_0 为理论计算结果, f_1 为有限元计算结果, f_2 为薄板理论计算结果, n 为振动模式。

表 1 不同厚度弯曲振动圆环共振频率计算结果

Tab. 1 The calculation results of different thickness of bending vibration of annular resonant frequency

厚度 Thickness h/mm	厚径比 Thick diameter ratio h/a	振动模式 Vibration mode n	内自由外固定 Inner freedom and external fixation			内外自由 Internal and external freedom			内外固定 Internal and external fixation			内固定外自由 Internal fixation and external freedom		
			f_0/kHz	f_1/kHz	f_2/kHz	f_0/kHz	f_1/kHz	f_2/kHz	f_0/kHz	f_1/kHz	f_2/kHz	f_0/kHz	f_1/kHz	f_2/kHz
8	0.32	1	7.28	7.79	9.26	15.64	16.35	22.15	10.63	11.12	15.25	8.15	8.87	11.37
		2	35.32	36.25	72.45	42.25	43.79	65.27	40.91	42.43	63.38	36.61	36.85	55.21
		3	63.64	64.87	117.72	70.46	72.10	122.46	66.50	70.54	120.56	59.39	59.84	110.24
9	0.36	1	8.12	8.48	11.35	17.10	17.57	23.41	11.86	12.35	16.13	9.324	9.745	13.35
		2	36.89	37.81	73.05	45.62	46.23	69.15	41.26	44.68	86.48	37.58	39.24	70.14
		3	66.03	68.42	127.21	72.45	73.16	133.28	71.59	77.49	125.61	65.42	70.13	130.47
10	0.40	1	9.25	9.88	13.64	18.56	19.24	26.13	12.99	13.55	18.21	10.54	10.89	15.28

厚度 Thickness h /mm	厚径比 Thick diameter ratio h/a	振动模式 Vibration mode n	内自由外固定 Inner freedom and external fixation			内外自由 Internal and external freedom			内外固定 Internal and external fixation			内固定外自由 Internal fixation and external freedom		
			f_0 /kHz	f_1 /kHz	f_2 /kHz	f_0 /kHz	f_1 /kHz	f_2 /kHz	f_0 /kHz	f_1 /kHz	f_2 /kHz	f_0 /kHz	f_1 /kHz	f_2 / kHz
11	0.44	2	37.47	38.43	57.43	47.11	47.851	71.22	42.78	44.36	94.65	38.78	40.13	60.19
		3	67.16	69.01	129.56	76.44	78.22	138.42	72.98	77.13	142.56	66.88	71.45	130.68
		1	10.86	11.87	16.26	19.72	20.25	28.57	14.12	14.82	20.42	11.76	11.95	16.43
		2	38.67	39.98	80.13	48.45	49.18	98.68	44.58	46.21	81.78	39.98	41.78	81.85
12	0.48	3	68.83	70.12	140.27	77.38	79.38	142.78	74.78	78.25	148.18	67.01	53.15	103.24
		1	39.98	41.78	81.85	20.74	21.23	29.36	15.48	16.025	22.483	12.79	13.12	18.17
		2	39.83	41.89	82.05	49.38	52.12	104.03	45.68	48.48	96.72	41.11	43.26	86.15
		3	69.68	75.34	151.41	78.25	85.31	170.24	75.88	82.25	168.36	69.25	75.57	150.62

由表 1 可以看出,厚圆环理论计算所得频率与有限元计算得到的频率基本符合,薄板理论计算结果与有限元计算结果差别比较大,这表明随着厚径比的增大,薄板理论是不适用的,而且可以得到随着厚度的增加,一阶、二阶、三阶频率都在不断增大,而且高阶频率随厚度的增加误差迅速增大表明厚径比增大,薄板理论不再适用。由表 1 可以得到利用薄板计算的基频的最大误差为 42%,二阶、三阶误差将更大,而用厚板理论计算的基频误差最大为 4.6%,二阶、三阶误差最大

误差为 5.2% 和 9.2%。

有限元法模拟了厚度为 8 mm,内外径为 8 mm、25 mm 圆环的相对横向位移曲线,图 1、图 2、图 3 圆环的第一阶、第二阶、第三阶弯曲振动振型图。图 4 和图 5 是有限元模拟所得圆环沿半径方向的弯振一阶、二阶位移分布图,可以得到一阶、二阶弯振时圆环的振动节点,其值与理论计算结果基本一致,这也表明本文理论的正确性。



图 1 厚圆环一阶振型
Fig. 1 A vibration type of thick ring

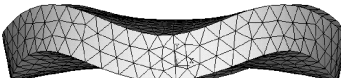


图 2 厚圆环二阶振型
Fig. 2 Two modes of thick ring



图 3 厚圆环三阶振型
Fig. 3 Three modes of thick ring

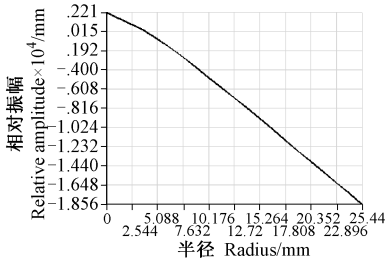


图 4 一阶弯振位移分布曲线
Fig. 4 The first order bending vibration displacement distribution curve

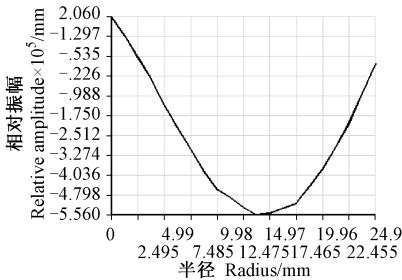


图 5 二阶弯振位移分布曲线
Fig. 5 The two order bending vibration displacement distribution curve

3 结论

经典理论只适用于薄板低频振动,而中厚板理论不仅适用于薄板也适用与中厚板的弯振问题的分析。基于 Mindlin 理论推导了厚圆环弯曲振动径向与横向位移解析表达式及不同边界条件下的频率方程。由频率方程理论计算得到的弯曲振动振型对应的频率与有限元得到的结果基本相符,其结论对厚圆环弯振辐射器的设计提供理论依据。

参考文献 (References)

[1] 曹志远. 厚板动力学理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 84-98.
CAO ZhiYuan. The plate dynamics theory and application[M]. Beijing: Science Press. 1983: 84-98(In Chinese).
[2] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 48-58.
FAN JiaRang. Accurate theory of thick laminated plates and shells [M]. Beijing: Science press, 1998: 48-58(In Chinese).
[3] 徐旭, 何福保. 厚板振动的三维弹性力学解[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(7): 78-82.
XU Xu, HE FuBao. Three dimensional elasticity solution for vibration problem of thick plate [J]. Applied Mathematics and

- Mechanics, 1998, 19(7): 78-82 (In Chinese).
- [4] 张 勇, 贺西平, 李 伟, 等. 自由边界弯曲振动矩形薄板辐射声场指向性研究[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 38(4): 36-40.
- ZHANG Yong, HE XiPing, LI Wei, et al. Research points to the bending vibration of a thin rectangular plate with free boundary radiation field[J]. Journal of Shaanxi Normal University: Natural Science Edition, 2010, 38(4): 36-40 (In Chinese).
- [5] 张 频, 贺西平. 自由边界弯曲振动圆形薄板的辐射阻抗研究[J]. 声学技术, 2006, 25(4): 56-59.
- ZHANG Pin, HE XiPing. Study on the radiation impedance of the bending vibration of circular thin plate with free boundary [J]. Acoustic Technology, 2006, 25(4): 56-59 (In Chinese).
- [6] 赵凌波, 贺西平, 刘志永. 固定边界阶梯圆盘的设计及其振动特性计算[J]. 机械设计, 2011(2): 78-81.
- ZHAO LingBo, HE XiPing, LIU ZhiYong. Design and calculation of stepped plate under fixed boundary and its vibration characteristics [J]. Mechanical Design, 2011(2): 78-81 (In Chinese).
- [7] 宁景锋, 贺西平, 李 娜. 纵振激励频率对圆盘弯曲振动特性的影响[J]. 振动与冲击, 2011, 30(4): 65-69.
- NING JingFeng, HE XinPing, LI Na. The excitation frequency on the flexural vibration characteristics of a circular plate[J]. Vibration and Shock, 2011, 30(4): 65-69 (In Chinese).
- [8] 朱 林, 李继云, 赵洪兵. 弯曲振动圆盘振动特性试验研究[J]. 机械设计与制造, 2010(3): 110-112.
- ZHU Lin, LI JiYun, ZHAO HongBing. Experimental study on vibration characteristics of flexural vibration disk [J]. Mechanical Design and Manufacturing, 2010(3): 110-112 (In Chinese).
- [9] 吕 明, 王时英, 轧 刚. 超声珩齿弯曲振动变幅器的位移特性[J]. 机械工程学报, 2008, 44(7): 106-111.
- LV Ming, WANG ShiYing, ZHA Gang. Displacement characteristics of ultrasonic gear honing bending vibration of transformer [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(7): 106-111 (In Chinese).
- [10] 王时英, 吕 明, 轧 刚. 超声珩齿指数型变幅器的动力学特性[J]. 机械工程学报, 2007, 43(6): 190-193.
- WANG ShiYing, LV Ming, ZHA Gang. Dynamic characteristics of ultrasonic gear honing index type transformer [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(6): 190-193 (In Chinese).
- [11] 张云电, 胡皇印, 林金钳. 超声珩磨声学系统关键技术研究[J]. 振动工程学报, 2007, 20(5): 538-542.
- ZHANG YunDian, HU HuangYin, LIN JinGan. Research on the key technology of acoustic system of ultrasonic honing [J]. Journal of Vibration Engineering, 2007, 20(5): 538-542 (In Chinese).
- [12] 王时英, 吕 明, 轧 刚. 非谐环盘及变幅杆组成的变幅器动力学特性研究[J]. 声学学报, 2008, 33(5): 462-468.
- WANG ShiYing, LV Ming, ZHA Gang. Study on dynamical characteristics of transformer with non resonance annular plate and luffing rod [J]. Chinese Journal of Acoustics, 2008, 33(5): 462-468 (In Chinese).
- [13] 张秀琴, 王时英, 吕 明. 高精度超声波辅助珩齿装置设计[J]. 机械设计与制造, 2010(8): 53-55.
- ZHANG XiuQin, WANG ShiYing, LV Ming. Design of high precision ultrasonic gear honing device [J]. Mechanical Design and Manufacturing, 2010(8): 53-55 (In Chinese).
- [14] XIANG Y, ZHANG L. Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 280: 633-55.
- [15] 潘晓娟, 贺西平. 厚圆盘弯曲振动的研究[J]. 物理学报, 2010, 59(11): 7 911- 7 915.
- PAN XiaoJuan, HE XiPing. Study on the thick disk bending vibration [J]. Journal of Physics, 2010, 59(11): 7 911- 7 915 (In Chinese).
- [16] 涂建新, 王知人, 李玉珍, 等. 简支圆板在磁场中的非线性随机振动[J]. 机械强度, 2014, 36(174): 504-509.
- TU JianXin, WANG ZhiRen, LI YuZhen, et al. Nonlinear random vibration of simply supported circular plate in a magnetic field [J]. Journal of Mechanical Strength, 2014, 36(174): 504-509 (In Chinese).
- [17] 杨 杰, 彭建设. 域内同心环支 Mindlin 中厚圆环的弯曲振动[J]. 武汉化工学院学报, 1996, 18(2): 54-57.
- YANG Jie, PENG JianShe. The bending vibration of multiple concentric ring supports Mindlin thick ring [J]. Journal of Wuhan Institute of Chemical Technology, 1996, 18(2): 54-57 (In Chinese).