

齿轮啮合热弹耦合应力的可靠度灵敏度分析*

THERMO-ELASTIC COUPLING STRESS RELIABILITY SENSITIVITY
ANALYSIS OF MESHING GEAR TOOTH

岳立新**

(辽宁工程技术大学 机械工程学院, 阜新 123000)

YUE LiXin

(College of Mechanical Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

摘要 为降低齿轮失效风险,分析影响啮合轮齿热弹耦合应力的相关因素;采用响应面法构建啮合轮齿热弹耦合应力的极限状态函数,得到轮齿热弹耦合应力可靠度与各相关参数的数学表达式;应用 Monte-Carlo 模拟法,得出轮齿热弹耦合应力可靠度对各参数的灵敏度表达式;以某行星齿轮传动的太阳轮为例,分析得到轮齿热弹耦合应力可靠度对齿宽、转速、模数和压力角的灵敏度。由灵敏度数值大小可知齿宽、模数、压力角和转速对啮合轮齿热弹耦合应力可靠度影响程度依次增大;由灵敏度正负可知减小转速和压力角或者增大齿宽和模数可提高轮齿热弹耦合应力的可靠度。研究为轮齿强度可靠性设计提供理论依据。

关键词 响应面法 轮齿 热弹耦合应力 可靠度灵敏度分析

中图分类号 TH132.4 TB114.3

Abstract To reduce the risk of failure of meshing gear tooth, it is necessary to analyse the influence of relative parameters on thermo-elastic coupling stress of meshing gear tooth; The limit thermo-elastic coupling stress state function of meshing gear tooth was built based on response surface method, and the mathematical expression between thermo-elastic coupling stress reliability and relative parameters was obtained. The sensitivity formula for thermo-elastic coupling stress reliability of meshing gear tooth to relative parameters was obtained by using Monte-Carlo method. With the Sun gear of planetary gear train as research object, thermo-elastic coupling stress reliability sensitivity to tooth width, rotating speed, module, pressure angle was obtained respectively. The sensitivity result showed that tooth width, module, pressure angle, rotating speed had a crescent influence on thermo-elastic coupling stress reliability sensitivity of meshing gear tooth, and thermo-elastic coupling stress reliability sensitivity would be improved by decreasing rotating speed and pressure angle or increasing tooth width and module. The study provides theory basis for the design of gear tooth strength reliability.

Key words Response surface method; Gear tooth; Thermo-elastic coupling stress; Reliability sensitivity analysis

Corresponding author: YUE LiXin, E-mail: yuelixin329@126.com, Fax: +86-418-3350524

The project supported by the National Natural Science Foundation (No. 51404135).

Manuscript received 20140808, in revised form 20140915

引言

齿轮啮合传动过程中,轮齿一方面因受载承受接触和弯曲应力,另一方面由于发热而承受热应力,所以轮齿在啮合过程中所受应力是热、弹应力综合作用的结果,称为热弹耦合应力。热弹耦合应力对轮齿齿面点蚀、疲劳失效和断裂有直接影响。国内外专家学者对齿轮热弹耦合应力问题进行了一定研究^{[1-5][6]359-365},但主要对齿轮热弹耦合应力进行直接分析计算,而关于相关因素对齿轮热弹耦合应力影响研究较少,这是

因为热弹应力是非线性耦合结果,较难建立各影响因素与热弹耦合应力的直接联系。

影响齿轮轮齿热弹耦合应力的因素较多,主要有齿数、模数、压力角、齿宽、转速、齿轮材料、齿轮转矩、润滑油型号、环境温度等。为防止齿轮运转过程中热弹耦合应力过大,必须分析相关因素对齿轮热弹耦合应力的影响,本文基于响应面法建立啮合轮齿热弹耦合应力极限状态函数,得到轮齿最大热弹耦合应力与齿轮相关参数的函数关系,分析得出热弹耦合应力可靠度对齿轮各参数灵敏度信息,为提高轮齿强度提供

* 20140808 收到初稿, 20140915 收到修改稿。国家自然科学基金资助项目(51404135)资助。

** 岳立新, 女, 1979 年 3 月生, 汉族, 辽宁锦州经济技术开发区人, 辽宁工程技术大学博士研究生, 讲师, 主要从事机械动力学分析、机械优化设计等方面研究, 发表学术论文数篇。

设计依据。

1 基于响应面法轮齿热弹耦合应力极限状态函数的建立

响应面法假定结构某真实响应 Y 与结构相关随机参数向量 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{N_R}]$ 的关系可用含交叉项的二次函数描述^{[6]359-365}, 见公式 1。取随机参数向量 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{N_R}]$ 的 N_s 个样本点, 对 N_s 个样本点进行试验或数值分析得到结构响应数据 ($y_1, y_2, \dots, y_{N_s}$)。对响应数据进行线性回归分析, 得到响应面函数中各待定系数的估计值, 见公式 2, 从而确定响应面函数, 以此代替结构真实响应。

$$Y = C_0 + \sum_{i=1}^{N_R} C_i X_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} C_{ij} X_i X_j \quad (1)$$

式中, $C_0, C_i, C_{ij} (i = 1, \dots, N_R; j = i, \dots, N_R)$ 为待定系数, 共 $n + 1 + n(n + 1)/2$ 个。

$$s = \sum_{i=1}^{N_s} \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N_s} [y_i - (C_0 + \sum_{i=1}^{N_R} C_i x_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} C_{ij} x_i x_j)]^2$$
$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial C_0} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial C_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_R \\ \frac{\partial s}{\partial C_{ij}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_R; j = i, \dots, N_R \end{cases} \quad (2)$$

选用 Box-Behnken 矩阵取样法来获取随机参数向量的 N_s 个样本点, 此方法对每个参数变量取三个概率水平点, 然后按规则排列组合中心点和边中点作为样本点^{[7][8]512-516}, 取样模型如图 1 所示。

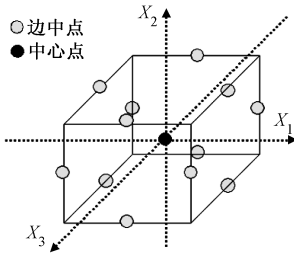


图 1 Box-Behnken 取样模型
Fig. 1 Box-Behnken sampling model

由上述, 设定啮合过程中轮齿最大热弹耦合应力的响应面函数为

$$p_{\max}(\mathbf{X}) = C_0 + \sum_{i=1}^{N_R} C_i X_i + \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{j=i}^{N_R} C_{ij} X_i X_j \quad (3)$$

设啮合轮齿许用应力为 p_0 , 如公式 4 所示, 建立轮齿温度极限状态函数, 其中参数向量 $\mathbf{X}$ 为函数自变量, 轮齿热弹耦合应力极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 的数值大小反映了热弹耦合应力的可靠度。

$$g(\mathbf{X}) = p_0 - p_{\max}(\mathbf{X}) \quad (4)$$

2 热弹耦合应力可靠度灵敏度分析

由于轮齿热弹耦合应力极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 反映了轮齿热弹耦合应力的可靠度, 因此轮齿热弹耦合应力可靠度灵敏度分析即为轮齿热弹耦合应力极限状态函数对各自变量参数的灵敏度分析。

应用 Matlab 中的 Monte-Carlo 模拟法实现极限状态函数的灵敏度分析, Monte-Carlo 模拟法假设在空间域 Ω 中, 极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 可表示为某一函数 f^* 的积分, 且存在一个任意的非零概率密度函数 p^* ^{[8]512-516}, 使得

$$g(\mathbf{X}) \int_{\Omega} f^*(j, \mathbf{X}; \xi) d\mathbf{X} = \int_{\Omega} \frac{f^*(j, \mathbf{X}; \xi)}{p^*(j, \mathbf{X}; \xi)} f^*(j, \mathbf{X}; \xi) d\mathbf{X} = E\left(\frac{f^*(j, \mathbf{X}; \xi)}{p^*(j, \mathbf{X}; \xi)}\right) = E(W) \quad (5)$$

式中, 令 $W = \frac{f^*(j, \mathbf{X}; \xi)}{p^*(j, \mathbf{X}; \xi)}$; $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{N_R}]$ 由概率密度函数 p^* 决定; ξ 为参数向量 $\mathbf{X}$ 中某一参数。

由公式(5)可知, $g(\mathbf{X})$ 可由 N 个随机抽样样本所产生的统计量 W_i 的均值近似估计, 即

$$g(\mathbf{X}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \quad (6)$$

则轮齿热弹耦合应力极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 对参数 ξ 的灵敏度可表示为

$$\partial_{\xi} g(\mathbf{X}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \partial_{\xi} W_i \quad (7)$$

3 轮齿热弹耦合应力求解分析

基于响应面法建立轮齿热弹应力极限状态函数时, 需确定参数样本点条件下轮齿最高热弹应力响应值, 因此需对啮合轮齿进行啮合过程中热弹耦合应力求解分析。

3.1 温度场边界条件

(1) 主从动齿轮啮合轮齿齿面的热流密度 q_1, q_2 分别为^[9]

$$q_1 = \frac{b_1 \omega_1 Q_{c1}}{2\pi v_{c1}} \quad (8)$$

$$q_2 = \frac{b_2 \omega_2 Q_{c2}}{2\pi v_{c2}} \quad (9)$$

式中, Q_{c1}, Q_{c2} 分别为主、从动轮轮齿啮合面上啮合点 C 处瞬时热流输入量; ω_1, ω_2 分别为主、从动轮角速度; v_{c1}, v_{c2} 为主、从动轮在啮合点 C 处线速度; b_1, b_2 为主、从动轮齿宽。

(2) 主从动轮轮齿啮合面对流散热系数为^[10]

$$h_t = \frac{\sqrt{\omega}}{2\pi} \sqrt{\lambda p_f c_f} \left(\frac{v_f H_c}{\gamma r_c} \right)^{\frac{1}{4}} q_{tot} \tag{10}$$

式中， ω 为主动轮或从动轮角速度； $\lambda, p_f, c_f, v_f, \gamma$ 分别为润滑油热传导率、密度、比热、运动黏度和热扩散系数； H_c 为啮合点 C 所在处主动轮或从动轮轮齿高度； r_c 为主动或从动轮在啮合点 C 处的曲率半径； q_{tot} 为标准化冷却总量。

3.2 力学边界条件

啮合轮齿法向接触力为

$$F_{Nc} = \frac{KT_2 z_1 / z_2}{r_c \cos \alpha} \tag{11}$$

式中， K 为双齿啮合区内齿间载荷分配系数； T_2 为从动轮转矩； z_1, z_2 为主、从动轮齿数； α 为压力角； r_c 为接触点在主动轮上的半径。

根据赫兹理论，齿面平均接触应力为

$$p_{Nc} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{F_{Nc} E}{2\pi R_{Ec} b (1 - \nu^2)}} \tag{12}$$

式中， $R_{Ec} = R_{E1} R_{E2} / (R_{E1} + R_{E2})$ ， R_{E1} 和 R_{E2} 分别为主、从齿轮轮齿接触点处的曲率半径，它们是随齿面啮合位置的变化而改变的； b 为齿宽； E 为齿轮材料弹性模量； ν 为材料泊松比。

3.3 间接耦合法求解热弹耦合应力

本文采用间接耦合法求解轮齿热弹耦合应力，间接耦合法适用于相互作用的非线性程度较低的耦合场^[11]。间接耦合法使用不同的数据库文件和结果文件进行计算。每个数据库文件包含一定的实体模型、单元、材料属性以及载荷等，首先进行第一次分析，然后将分析结果读入到下一个数据库文件中，接着进行第二次分析，如此直至分析结束。分析过程中单元和节点数量编号在数据文件和结果文件中保持一致。

根据公式(8) ~ 式(10)对齿轮进行温度场边界条件加载，求解出温度场分布结果并保存数据。进行齿轮接触和弯曲应力分析计算时，首先清除热分析时的载荷，添加随温度变化的材料属性，转换单元，然后创建接触并添加约束，最后读入温度场分析结果进行求解，从而得到轮齿热弹耦合应力值^[12]。

4 具体实例分析

以某行星齿轮传动系统的太阳轮为研究对象，基于响应面法建立啮合轮齿热弹耦合应力极限状态函数，并分析轮齿热弹耦合应力可靠度对齿宽、转速、模数、压力角参数的灵敏度。主要参数如表 1 所示。

本文考虑齿轮齿宽、转速、模数和压力角参数对热弹耦合应力的影响，因此选取它们为自变量建立轮齿温度极限状态函数。依据响应面法，假定齿宽、转速、模数和压力角均为随机变量，并且各随机变量均服从

正态分布，其均值和标准差如表 2 所示。

表 1 主要参数

Tab.1 Main parameters

参数名称 Parameter name	
齿数 Tooth numbers z	19
模数 module m/mm	12
压力角 Pressure angle $\alpha/(\text{^\circ})$	20
齿宽 Tooth width b/mm	190
转速 Speed $n/(\text{r}/\text{min})$	228
齿轮材料 Gear material	20CrNi2MoA
输入转矩 Input torque T/mm	41 838
润滑油型号 lubricating oil model	SCH632
环境温度 Environment temperature $t/^\circ\text{C}$	74

表 2 各随机变量的均值和标准差

Tab.2 Mean and standard deviation of the random variable

变量 Variable	齿宽 Tooth width b/mm	转速 Speed $n/(\text{r}/\text{min})$	模数 Module m/mm	压力角 Pressure angle $\alpha/(\text{^\circ})$
均值 Mean	190.0	228	12.0	20.0
标准差 Standard deviation	10.0	20	2.0	2.5

根据 Box-Behnken 矩阵取样法进行各随机变量的 29 次取样，限于篇幅列出部分样本点，如图 2 所示。

Std 样本点	Factor1 A: 齿宽 b /mm	Factor2 B: 转速 n /r/min	Factor3 C: 模数 m /mm	Factor4 D: 压力角 $\alpha/^\circ$	Respons Pmax: 最高热弹 耦合应力 MPa
1	168.80	190.00	12.00	20.00	604.3
2	211.20	190.00	12.00	20.00	576.8
3	168.80	266.00	12.00	20.00	590.4
4	211.20	266.00	12.00	20.00	563.6
5	190.00	228.00	8.05	15.15	603.2
6	190.00	228.00	15.95	15.15	609.8
7	190.00	228.00	8.05	24.85	558.7
8	190.00	228.00	15.95	24.85	568.2
9	168.80	228.00	12.00	15.15	608.5
10	211.20	228.00	12.00	15.15	578.0
11	168.80	228.00	12.00	24.85	574.4
12	211.20	228.00	12.00	24.85	579.8

图 2 Box-Behnken 样本点及响应值

Fig.2 Box-Behnken sample points and response values

完成抽样后，对啮合轮齿进行多次热弹耦合应力分析，获取参数样本点对应的轮齿最高热弹耦合应力响应值。

以样本点 1 对应参数为例，对啮合轮齿进行热弹耦合应力分析。首先建立行星轮系啮合有限元模型，如图 3 所示。进行有限元分析时，将轮齿设置为刚性体，并在主动轮上施加相应的输入转矩，约束各个运动件的移动自由度，只保留转动自由度。

根据公式(8) ~ 式(10) 计算太阳轮轮齿啮合面沿齿高方向各位置温度分析边界条件，包括摩擦热流密度分布和对流散热系数分布，分别如图 4 和图 5 所示。太阳轮齿面摩擦热流密度和换热系数的施加如图 6 所示，求解出温度场分布结果并保存数据。根据公

式(11) ~ 式(12)确定太阳轮轮齿啮合面应力分布如图 7 所示,最终运用间接耦合法求解得到太阳轮啮合轮齿热弹耦合应力分布,如图 8 所示,可知样本点 1 下太阳轮啮合轮齿最大热弹耦合应力为 604.3 MPa。最终经多次分析将所有样本点对应的轮齿最大热弹耦合应力响应值 $p_{\max}$ 列入到图 2 的最右侧区域中。

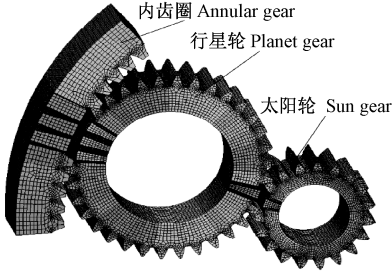


图 3 行星轮系啮合有限元模型

Fig. 3 Meshing finite element model of the planetary gear train

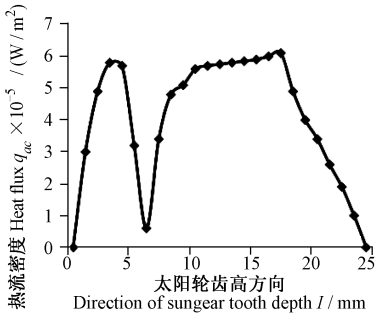


图 4 太阳轮啮合轮齿齿面摩擦热流密度分布

Fig. 4 Friction heat flow density distribution of the sun gear meshing tooth surface

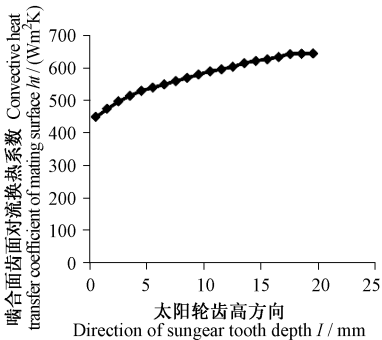


图 5 太阳轮啮合轮齿齿面对流散热系数分布

Fig. 5 Convection coefficient distribution of the sun gear meshing tooth surface

应用 Design-Expert 软件,依据各样本点、响应值和公式(1) ~ 式(3),得到图 9 所示的啮合轮齿最大热弹耦合应力三维响应面以及最大热弹耦合应力响应函数,见公式 13。

$$p_{\max} = 418.08 + 1.41b + 1.16n + 6.50m - 6.27\alpha + 2.17 \times 10^{-4}bn + 0.022bm + 0.087b\alpha -$$

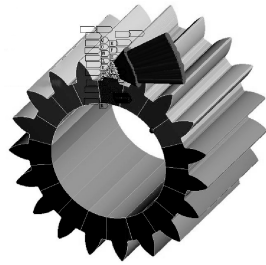


图 6 太阳轮齿面摩擦热流密度和换热系数施加

Fig. 6 Applying friction heat flow density and heat transfer coefficient on sun gear tooth surface

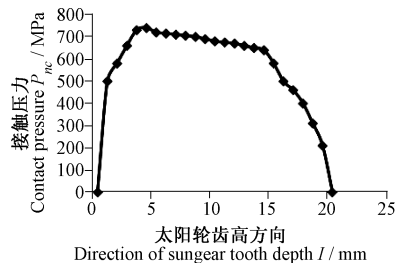


图 7 太阳轮轮齿啮合面应力分布

Fig. 7 Stress distribution of the sun gear meshing tooth surface

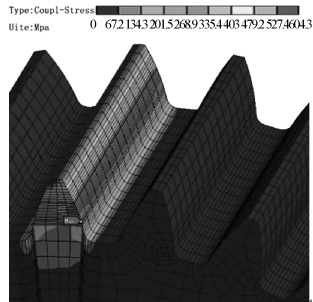


图 8 样本点 1 下太阳轮啮合轮齿热弹耦合应力分布

Fig. 8 Thermo-elastic coupling stress distribution of the sun gear meshing tooth surface under sample points 1

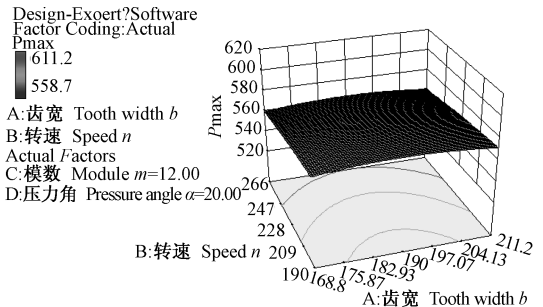


图 9 啮合轮齿最高温度三维响应面

Fig. 9 3 D response surface of the meshing gear under the highest temperature

$$\begin{aligned} &0.054nm - 0.013n\alpha + 0.0348m\alpha - \\ &0.010b^2 - 8.43 \times 10^{-4}n^2 + 0.108m^2 - \\ &0.267\alpha^2 \end{aligned} \tag{13}$$

基于响应面方法得到啮合轮齿最大热弹耦合应力的极限状态函数,见公式(14),该函数建立了轮齿应力可靠度与齿宽、转速、模数、压力角参数的数学关系式

$$g(\boldsymbol{X}) = p_0 - p_{\max} =$$
$$418.08 + 1.41b + 1.16n + 6.50m - 6.27\alpha +$$
$$2.17 \times 10^{-4}bn + 0.022bm + 0.087b\alpha -$$
$$0.054nm - 0.013n\alpha + 0.0348m\alpha -$$
$$0.010b^2 - 8.43 \times 10^{-4}n^2 + 0.108m^2 -$$
$$0.267\alpha^2$$
$$(14)$$

为得到各参数对啮合热弹耦合应力可靠度的影响程度,应用 Matlab 中的 Monte-Carlo 模拟法,对极限函数 $g(\boldsymbol{X})$ 进行随机抽样模拟,最终得到轮齿应力可靠度对各设计参数的灵敏度结果,如图 10 所示。

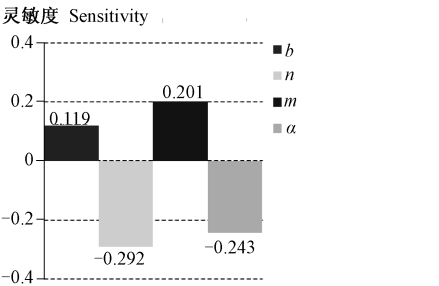


图 10 轮齿热弹耦合应力可靠度对各参数的灵敏度
Fig. 10 Thermo-elastic coupling stress reliability of the gear tooth for each parameter sensitivity

由图 10 知,各参数对轮齿热弹耦合应力可靠度均有显著影响,轮齿热弹耦合应力可靠度对齿宽、转速、模数和压力角的灵敏度分别为 0.119、-0.292、0.201 和 -0.243。由灵敏度大小和正负可知,齿轮齿宽、模数、压力角和转速对啮合轮齿热弹耦合应力可靠度影响程度依次增大;减小转数和压力角可提高啮合轮齿热弹耦合应力可靠度,增大齿宽和模数可提高啮合轮齿热弹耦合应力可靠度。

5 结论

为提高齿轮传动可靠性,须分析影响啮合轮齿热弹耦合应力的相关因素;运用响应面法建立了啮合轮齿热弹耦合应力的极限状态函数方程;应用 Monte-Carlo 模拟法得到了轮齿热弹耦合应力可靠度对各参数的灵敏度表达式;根据相关参数对轮齿应力的灵敏度,调整影响轮齿热弹耦合应力的相关参数,以提高齿轮轮齿强度可靠性,降低其失效风险。

参考文献 (References)

[1] Bryan J B. International sttus of thermal error re-search[J]. Annals

of CIRP, 1990, 39(2): 645-656.

[2] 邱良恒,辛一行,王统,等. 齿轮本体温度场和热变形修形计算[J]. 上海交通大学学报:自然科学版,1995,29(2):79-86.

QIU LiangHeng, XIN YiXing, WANG Tong, et al. A calculation of bulk temperatureand thermal deflection of gear tooth about profile modification[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University: Natural Science Edition,1995,29(2): 79-86(In Chinese).

[3] 李绍彬. 高速重载齿轮传动热弹变形及非线性耦合动力学研究[D]. 重庆:重庆大学,2004: 17-20.

LI ShaoBin. Studyon coupled thermo-elastic deformation and nonlinear dynamic emulate about high-speed, heavy-load gear transmissions system[D]. Chongqing: Chongqing University, 2004: 17-20(In Chinese).

[4] 赵宁,谢咏君,郭辉. 基于热弹耦合的双圆弧齿轮接触特性研究[J]. 机床与液压,2008,36(1):37-40.

ZHAO Ning, XIE YongJun, GUO Hui. Study of contact analysis of double circular arc gear based on heat flexibility coupling Field[J]. Machine Tool&Hydraulics, 2008,36(1):37-40(In Chinese).

[5] 吴吉平,明兴祖. 基于多物理场作用的螺旋锥齿轮数控磨削残余应力[J]. 机械科学与技术,2012,31(4):633-638.

WU JiPing, MING XingZu. Exploring NC grinding residual stress of spiral bevel gear using multi-physical fields[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2012,31(4):633-638(In Chinese).

[6] 汪中厚,张宁,董德敏,等. 基于空间接触的齿根过渡曲线对齿轮弯曲强度影响分析[J]. 机械强度,2013,35(3):359-365.

WANG ZhongHou, ZHANG Ning, DONG DeMin, et al. Analysis of the influence of fillet curves on gear bending strength based on space contact[J]. Journal of Mechanical Strength. 2013,35(3):359-365(In Chinese).

[7] Box G, Behnken D. Some new three level design for the study of quantitative variables[J]. Technometrics, 1960, 2(04): 455-476.

[8] 赵洁,吕震宙. 隐式极限状态方程可靠性分析的加权响应面法[J]. 机械强度,2006,28(4):512-516.

ZHAO Jie, LV ZhenZhou. Response surface method for reliability analysis of implicit limit state equation based on weighted regression[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006,28(4):512-516(In Chinese).

[9] Sang-Hyo Kim, Seong-Won Na. Response surface method using vectorprojected sampling points[J]. Structural Safety, 1997, 19(1): 3-19.

[10] Lataillade A D, Blanco S, Clergent Y, et al. Monte-Carlo method and sensitivity estimations [J]. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2002, 75(05): 529-538.

[11] 龚宪生,王欢欢,张干青,等. 行星齿轮轮齿本体温度场与闪温研究[J]. 农业机械学报,2011,42(10):209-216.

GONG XianSheng, WANG HuanHuan, ZHANG GanQing, et al. Analysis of bulk temperature field and flash temperature for planet gear teeth[J]. Journal of Agricultural Machinery, 2011, 42(10): 209-216(In Chinese).

[12] 龙慧. 高速齿轮传动轮齿的温度模拟及过程参数的敏感性分析[D]. 重庆:重庆大学,2001: 42-46.

LONG Hui. Modelling of surface temperature in high-speed gears and sensitivity analysis [D]. Chongqing: Chongqing University, 2001: 42-46(In Chinese).