

扭转梁扭转刚度的理论计算方法研究^{*}

STUDY ON TORSION STIFFNESS CALCULATION METHOD FOR TWIST BEAM

李建如^{**}

(上海汽车集团股份有限公司技术中心, 上海 201804)

LI JianRu

(SAIC Motor Technical Center, Shanghai 201804, China)

摘要 基于约束扭转理论对汽车后扭转梁的扭转刚度进行了计算,并采用线刚度,即单位外力作用下的轮心位移作为评价指标。在横梁几乎提供全部刚度的前提下,根据受力分析和几何关系,得到了横梁所受扭转力矩和轮心位移的计算公式。总结了典型的横梁截面形式,并给出了常用的扭转截面常数算式,针对简化后的主梁截面,利用薄壁结构力学推导了翘曲截面常数的计算公式。根据薄壁件的约束扭转理论,对主梁端面扭转角进行了推导,从而得出了不带扭杆扭转梁的刚度计算公式,并推广到了带扭杆的扭转梁,且对各个因子的影响程度进行了对比。和试验结果相比,考虑约束扭转时的计算结果与测量值的偏差在 7.4% ~ 10.4% 之间,远优于考虑自由扭转时的计算结果。在零件概念设计阶段,利用扭转梁的外阔尺寸参数和截面特性参数,可以尽早地预测设计结果,显著缩短开发周期。

关键词 约束扭转 扭转梁 扭转刚度 横梁 主梁 薄壁结构

中图分类号 U463.02 U463.33 TB125

Abstract The warping torsion theory is used in torsion stiffness calculation for vehicle's rear twist beam and the stiffness is shown as displacement produced by per Newton force on the wheel center. Considering that the stiffness depends on lateral beam mostly, the torque applied on that beam and the displacement of wheel center are derived from force analysis and geometric relations. Typical beam sections are introduced and the relevant calculation formulas of torsional constant are provided, that of warping constant is also deduced for the simplified main beam section by using the mechanics of thin walled structure. The torsion angle at main beam's outside most section is calculated according to the warping theory of thin walled structure, then the torsion stiffness is get for both of the twist beams with or without lateral bar and the influencing factors are also analyzed. Comparing with the test results, the calculating error is from 7.4% to 10.4%, much better than the results considering free torsion only. With outline dimensions and section parameters, the calculating method can advance the target estimating job and cut the developing period in concept design stage.

Key words Warping torsion; Twist beam; Torsion stiffness; Lateral beam; Main beam; Thin walled structure

Corresponding author: LI JianRu E-mail: lijianru@saicmotor.com, Tel: +86-21-61388605, Fax: +86-21-61388888

Manuscript received 20131230, in revised form 20140217

引言

作为扭转梁式半独立后悬架的核心,扭转梁的扭转刚度直接影响后桥的侧倾特性和整车的操作稳定性。扭转刚度目标通常是在车辆的概念设计阶段由后桥的侧倾角刚度目标分解而来的,但扭转刚度并非侧倾角刚度的唯一决定因素。文献[1]¹⁶提出的扭转梁式后悬架概念设计流程,主张根据悬架系统特性参数来判定扭转梁是否达到设计目标,这显然会浪费较多的开发时间。文献[2]²⁸提出在详细设计之前要进

行刚度校核,但也没有提出具体的解决办法。为了缩短开发周期,在零件开发的早期,利用已确定的外阔尺寸和横梁截面尺寸参数来初步预测结果是非常必要的。

当前对扭转刚度进行理论计算的文献不多,文献[1]¹⁵⁻¹⁶给出的后桥侧倾角刚度计算公式表明,目前的理论计算一般将横梁扭转作为自由扭转来看待,但实际上横梁在扭转时外力矩并不通过其扭转中心,且横梁的自由翘曲受到了纵臂的约束,因此横梁的扭转属于典型的约束扭转。本文以符拉索夫的开口薄壁件

^{*} 20131230 收到初稿, 20140217 收到修改稿。

^{**} 李建如, 男, 1980 年 11 月生, 山西省昔阳县人, 汉族, 哈尔滨工业大学车辆工程专业工学硕士。目前就职于上海汽车集团股份有限公司技术中心, 高级工程师, 主要从事产品技术分析、零部件和系统台架试验等相关工作。

约束扭转理论为出发点,进行了扭转刚度理论计算方法
的探讨。

1 扭转工况下的受力分析

扭转梁在扭转时,纵臂几乎没有挠曲变形,轮心
的位移主要是由横梁的扭转造成的,也就是横梁几乎
提供全部的扭转刚度^{[2]29}。文献[2]²⁹以角刚度来表
征扭转刚度,为了便于理解,本文采用线刚度 K_L 来表
示,且有

$$K_L = F/\lambda$$

(1)

式中, F 为作用在轮心上 z 方向的力, λ 相应的轮心位
移。

图 1a 所示为扭转梁的主要外阔尺寸参数和扭转
时的受力情况。外力 F 分别作用在两端轮心处,且大
小相等、方向相反,不考虑扭转梁安装点 O_L 、 O_R 的橡
胶衬套,用球铰代替,球铰对扭转梁作用有外力 F_1 、
 F_2 。图 1b 所示为纵臂的受力情况和扭转前后的位置
示意,横梁对纵臂作用有集中力 P 、扭转力矩 T_x 和 T_y ,
纵臂的转角与横梁外端的扭转角相等,为 θ_0 。根据受
力平衡和几何关系有

$$\begin{cases} P = \frac{L_1 - L_2}{L_2} F \\ T_y = FR + Pr \\ \lambda = R \sin \theta_0 \end{cases}$$

(2)

式中, L_1 为后轮距, L_2 扭转梁安装点的距离, R 为纵臂
的有效长度, r 为横梁几何中心的位置。

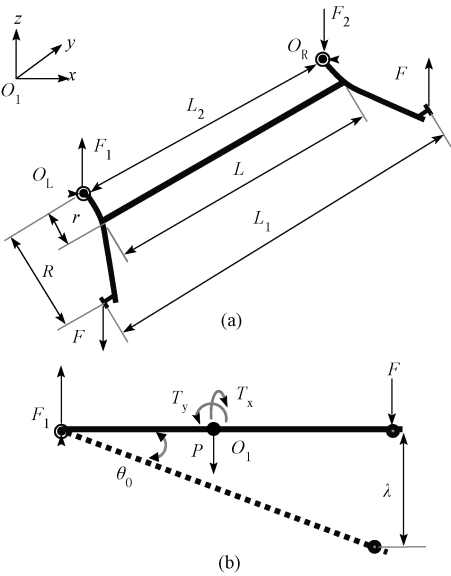


图 1 扭转梁尺寸参数和扭转工况下受力分析
Fig. 1 Dimensions of twist beam and force
analysis when twisted

可见,作用在横梁上的扭矩与轮距、扭转梁安装
点距离、纵臂有效长度和横梁的布置位置有关;而轮

心的位移与纵臂有效长度和横梁扭转角有关。

2 横梁截面特性参数计算

横梁的扭转角除了受外力矩的影响外,截面特性
也是一个重要影响因素。图 2 所示为典型的横梁截
面^{[3]4},其中有些横梁只有主梁,不带扭杆。主梁按照
截面形状可以分为开口型或闭口型, V 型、梯形或者 U
型等。因为主梁的厚度远小于其在另外两个方向的
尺寸,所以是一种典型的薄壁件,而扭杆属圆轴型零
件,其扭转遵循平面假设^{[4]69-70},不需要像主梁那样考
虑翘曲,本节主要说明扭转截面常数和翘曲截面常数
如何计算。

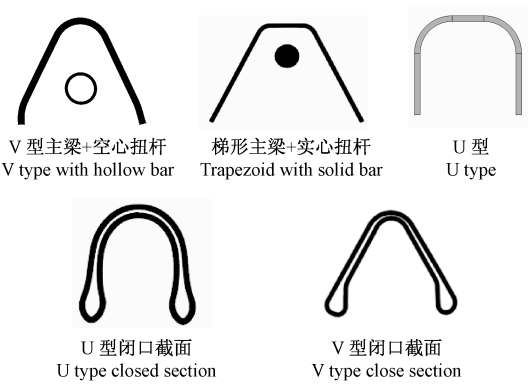


图 2 典型横梁截面示意图
Fig. 2 Typical beam section

2.1 扭转截面常数

根据圣维南自由扭转理论,开口截面的扭转截面
常数为^{[4]72-74, [5]22}

$$J = \frac{1}{3} t^3 H$$

(3)

式中, t 为截面的厚度, H 为截面中线的长度。

闭口截面扭转截面常数计算按照布雷斯特第二
公式^{[4]75, [5]26}

$$J = \frac{4\bar{\omega}^2 t}{H}$$

(4)

式中, $\bar{\omega}$ 为截面中心线所围成的面积。

圆轴类零件的扭转截面常数为^{[4]58}

$$J = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \delta^4)$$

(5)

式中, D 为圆管外径, δ 为内外径之比。

2.2 翘曲截面常数

薄壁件的约束扭转理论引入了一个基本假
定——符拉索夫周边假定,即在扭转时截面的形状
不发生变化^{[5]1-2},由此可以认为扭转前后截面翘曲常
数不变,该常数,即扇性惯性矩表示为^{[5]37}

$$I_w = \int_0^A w^2 dA$$

(6)

式中, w 为截面的主扇性坐标, $w = \int_0^s h ds$, h 为截面上一点切线到截面扭转中心的距离, 当该点至扭转中心的连线沿曲线坐标 s 方向为顺时针转动时, h 为正, 否则为负^{[5]8-9, 36}。

本文只考虑关于 U 轴对称的截面, 非对称截面的计算方法类似。图 3 所示的开口截面为图 2 中主梁截面的简化形式, 图 2 中的闭口截面可以认为是两层开口截面的组合。用 $L_{A'A}$ 、 $L_{B'B}$ 、 $L_{C'C}$ 、 L_{BC} 和 $L_{A'C'}$ 分别表示 $A'A$ 段、 $B'B$ 段、 $C'C$ 段、 BC 段和 $A'C'$ 段的长度, 当 $L_{A'A}$ 为零时简化截面为 V 型, 当圆角半径 ρ 为零时截面为梯形, 当 α 较小时为 U 型, 而当 $L_{A'A}$ 和 L_{BC} 为零时则为圆弧型。

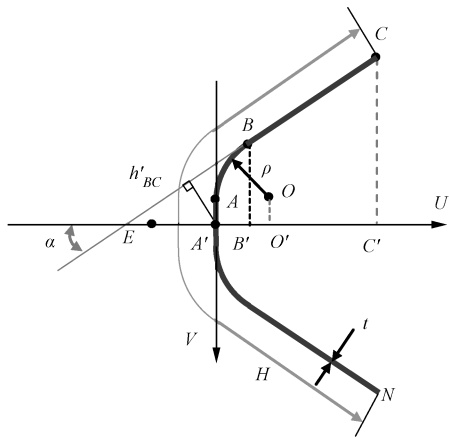


图 3 简化后的主梁截面

Fig. 3 Simplified beam section

2.2.1 截面扭转中心

在计算主扇性坐标前, 必须首先确定截面的扭转中心和扇性零点。因为截面对称, 扭转中心在截面的对称轴上^{[5]38}, 如图 3 中 E 点所示, 以 A' 为计算扭转中心和扇性零点时, 实际扭转中心的 U 坐标为^{[5]36}

$$U_E = U_{A'} + \frac{I_{w'V}}{I_U} \quad (7)$$

式中, $I_{w'V}$ 和 I_U 分别为截面的扇性惯性积和对 U 轴的惯性矩, $I_{w'V} = \int_0^{\frac{H}{2}} w' V t ds$, $I_U = \int_0^{\frac{H}{2}} V^2 t ds$ 。

根据式(7)求得截面上各段的扇性惯性积和惯性矩。

$A'A$ 段

$$\begin{cases} I_{w'V} = 0 \\ I_U = \frac{L_{A'A}^3 t}{3} \end{cases} \quad (8)$$

AB 段

$$\begin{cases} I_{w'V} = \rho^2 t \left\{ \frac{\rho L_{A'A}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2 + \frac{\rho^2 \sin 2\alpha}{4} - \right. \\ \left. L_{A'A}^2 \cos \alpha + \rho^2 \left[\cos \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha \right] + \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\rho L_{A'A} - \frac{\rho^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{\rho L_{A'A} \cos 2\alpha}{4} \} \\ I_U = \rho t \left[\left(L_{A'A}^2 + \frac{\rho^2}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{\rho^2 \sin 2\alpha}{4} - \right. \\ \left. 2\rho L_{A'A} (\sin \alpha - 1) \right] \end{cases} \quad (9)$$

BC 段

$$\begin{cases} I_{w'V} = t \left[\frac{(w'_B \sin \alpha + L_{B'B} h'_{BC}) L_{BC}^2}{2} + \right. \\ \left. w'_B L_{B'B} L_{BC} + \frac{L_{B'B}^3 L_{BC}}{3} \sin \alpha \right] \\ I_U = \frac{t}{3 \sin \alpha} (L_{C'C}^3 - L_{B'B}^3) \end{cases} \quad (10)$$

式中, $w'_B = \rho \left[\rho \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \rho \cos \alpha - L_{A'A} (\sin \alpha - 1) \right]$,

$h'_{BC} = L_{C'C} \cos \alpha - L_{A'C'} \sin \alpha$ 。

将式(8) - 式(10)中求得的 $I_{w'V}$ 和 I_U 带入式(7)即可求得扭转中心的位置。由于截面对称, U 轴上方和下方部分截面的主扇性坐标符号 w' 正好相反, $\int_s w' t ds = 0$, 所以 A' 就是扇性零点。

2.2.2 截面翘曲常数

扭转中心和扇性零点确定后, 根据式(6)可以求得各段截面的翘曲常数, 用 $L_{A'E}$ 和 $L_{O'E}$ 分别表示线段 $A'E$ 和 $O'E$ 的长度, 则有

$A'A$ 段

$$I_w = \frac{L_{A'E}^2 L_{A'A}^3 t}{3} \quad (11)$$

AB 段

$$\begin{aligned} I_w = \rho t \left\{ \frac{\rho^2 (L_{A'A}^2 - L_{O'E}^2) \sin 2\alpha}{4} + \frac{\rho^4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^3}{3} + \right. \\ \left(\rho - L_{A'E} \right) 2L_{A'A}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \rho^2 L_{O'E} L_{A'A} \cos^2 \alpha + \\ \frac{\rho^2 (L_{O'E}^2 + L_{A'A}^2) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} - 2\rho L_{A'A} (\rho - L_{A'E}) \times \\ \left[L_{A'A} \cos \alpha - \frac{\rho \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2}{2} + L_{O'E} (1 - \sin \alpha) \right] - \\ 2\rho^3 L_{A'A} \left[\sin \alpha - 1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \alpha \right] - \\ \left. 2\rho^3 L_{O'E} \left[\cos \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

BC 段

$$I_w = (w_B^2 L_{BC} + \frac{1}{3} h_{BC}^2 L_{BC}^3 + w_B h_{BC} L_{BC}^2) t \quad (13)$$

式中, $h_{BC} = L_{C'C} \cos \alpha - L_{A'E} \sin \alpha$,

$w_B = \rho^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + (\rho - L_{A'E} - \rho \sin \alpha) L_{A'A} -$

$\rho L_{0'}E \cos \alpha_0$

由式(11) – 式(13)可知,翘曲截面常数与主梁厚度成正比。

3 刚度计算

接前所述,横梁外端的扭转角等于纵臂的转角,因此只要计算横梁在单位外力作用下产生的扭转角,就可以获得刚度值。

对于不带扭杆的扭转梁,其扭转刚度就是主梁的扭转刚度,而带扭杆的扭转梁,其刚度为两部分刚度的复合。

3.1 不带扭杆扭转梁的刚度计算

根据文献[5]^{43,56}、文献[6]⁷⁷⁷和文献[7],在翘曲扭转中,以圣维南扭转刚度 GJ 和翘曲扭转刚度 EI_w 来抵抗外力偶矩 T ,它们之间的关系为

$$T = -EI_w \frac{d^3 \theta}{dy^3} + GJ \frac{d \theta}{dy} \tag{14}$$

该式的通解是

$$\theta = C_1 \cosh ky + C_2 \sinh ky + C_3 y + C_4$$
$$k = \sqrt{\frac{\mu GJ}{EI_w}} \tag{15}$$

式中, $C_1 - C_4$ 为待定系数, E 和 G 分别为弹性模量和剪切弹性模量,本文中分别取 210 GPa 和 79.2 GPa。 μ 为截面类型参数,当主梁为开口截面时, $\mu = 1$,为闭口截面时, $\mu = 1 - J/I_p$, I_p 为截面主惯性矩。对于闭口截面, J 的数量级通常为 10^4 ,而 I_p 的数量级为 10^6 ,故可认为 $\mu = 1$ 对闭口截面也成立。

以横梁左端为 y 坐标零点,在此截面上有 $T = T_y$ 。扭转梁两端交叉扭转时,左端可以认为是自由端,中间截面可以等效为固定端,其边界条件分别为 $\ddot{\theta}_0 = 0$ 和 $\dot{\theta}_{L/2} = 0, \theta_{L/2} = 0$ ^{[5]45},将上述边界条件带入式(14)和式(15),即可求得横梁左端面的扭转角

$$\theta_0 = \frac{T_y}{GJ} \left(\frac{L}{2} - \frac{\mu}{k} \text{th} \frac{kL}{2} \right) \tag{16}$$

显然,主梁的扭转角包括两部分,即自由扭转角和翘曲扭转角,分别用 $\frac{T_y L}{2GJ}$ 和 $-\frac{\mu T_y}{kGJ} \text{th} \frac{kL}{2}$ 表示,后者的符号为负,表示翘曲有减小扭转变形,增加刚度的效果。

当 θ_0 较小时,认为 $\sin \theta_0 = \theta_0$,将式(2)和式(16)代入式(1)求得刚度计算公式为

$$K_L = \frac{2GJ}{RL(R + \frac{L_1 - L_2}{L_2} r) (1 - \frac{2\mu}{kL} \text{th} \frac{kL}{2})} \tag{17}$$

式中,项 $\frac{J}{1 - \frac{2\mu}{kL} \text{th} \frac{kL}{2}}$ 为考虑翘曲时的等效扭转截面

常数。

根据正交试验设计,式(17)中各因子对扭转刚度的影响如图4所示。扭转截面常数 J 和翘曲截面常数 I_w 对刚度有较大的影响,在扭转梁的外阔尺寸参数中纵臂的有效长度 R 对刚度的影响最大,主梁长度 L 次之,主梁安装点间距 L_2 再次,轮距 L_1 和主梁位置 r 的影响最小。

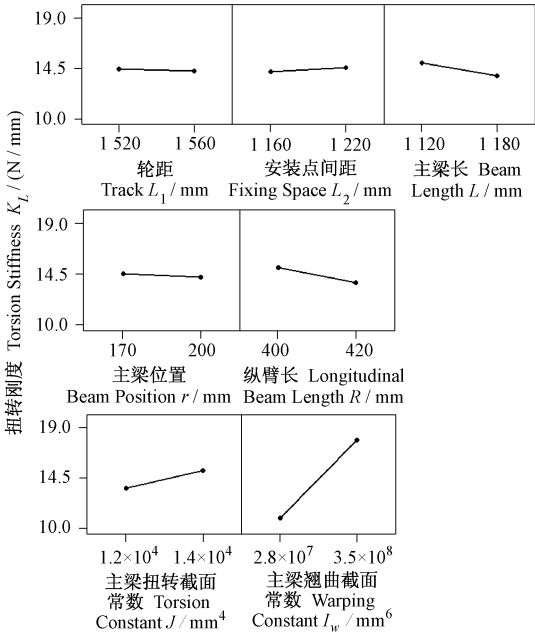


图 4 主要因子对扭转刚度的影响

Fig. 4 Importance of influence factors to torsion stiffness

3.2 带扭杆的扭转梁刚度计算

对带扭杆的扭转梁,主梁和扭杆都承受部分外力矩,主梁外端承受的分量为 T_{y1} ,其扭角计算公式同式(16),扭杆外端承受的力矩分量为 T_{y2} ,其扭角计算公式为^{[4]62}

$$\theta_{0\text{扭杆}} = \frac{T_{y2} L}{2GJ_{\text{扭杆}}} \tag{18}$$

根据主梁和扭杆的几何对应关系 $\theta_{0\text{扭杆}} = \theta_0$,可以得出

$$K_L = \frac{2G \left(J_{\text{扭杆}} + \frac{J}{1 - \frac{2\mu}{kL} \text{th} \frac{kL}{2}} \right)}{R(R + \frac{L_1 - L_2}{L_2} r)L} \tag{19}$$

图5所示为扭杆和主梁对整体扭转刚度的贡献对比,扭杆提供的刚度是恒定的,而具有相同厚度和截面中线长度的主梁在改变截面形状时,翘曲截面常数从 $3 \times 10^7 \text{ mm}^6$ 增加到 $3 \times 10^8 \text{ mm}^6$,从而使主梁提供的刚度增加了近一倍。

4 验证

为了验证理论计算方法的准确性,对三种类型扭

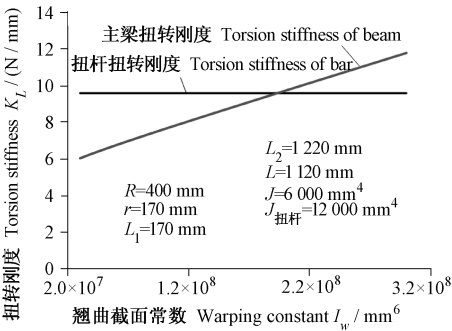


图5 扭杆和主梁对整体扭转刚度的贡献

Fig. 5 Contribution of torsion bar and main beam to overall stiffness

表 1 三种扭转梁主要尺寸参数和刚度值

Tab.1 Parameters and stiffness of three twist beam

	扭转梁 Beam A	扭转梁 Beam B	扭转梁 Beam C
轮距 Track L_1 /mm	1 520	1 564	1 535
纵臂长度 Effective length of longitudinal beam R /mm	420	400	440
主梁位置 Position of beam r /mm	170	175	220
安装点间距 Spacing of fixing points L_2 /mm	1 165	1 170	1 200
主梁长度 Length of beam L /mm	1 120	1 180	1 156
横梁截面 Section			
主梁扭转截面常数 Torsion constant of beam J /mm ⁴	26 922	5 225	13 680
主梁翘曲截面常数 Warping constant of beam I_w /mm ⁶	6.41×10^7	2.12×10^7	3.85×10^8
扭杆扭转截面常数 Torsion constant of bar $J_{\text{扭杆}}$ /mm ⁴	/	12 692	/
刚度计算值 Stiffness calculated K_L /(N/mm)	24.36	14.16	15.7
刚度实测值 Stiffness measured K_L /(N/mm)	26.3	15.8	17.1
理论计算偏差 Error	7.4%	10.4%	8.2%
仅考虑自由扭转时的扭转刚度计算值 Stiffness calculated at free torsion K_L /(N/mm)	22.3	13.1	9.0

5 结论

本文采用约束扭转理论探讨了扭转梁扭转刚度的理论计算方法。

- 1) 首先分析了扭转时横梁的受力情况和轮心位移。
- 2) 给出了典型横梁截面的扭转常数计算公式,并推导了简化主梁截面的翘曲常数计算公式。
- 3) 根据约束扭转理论,获得了主梁端面扭转角,最终得出了不带扭杆和带扭杆两种扭转梁的刚度计算公式,并对影响因子进行了分析。
- 4) 和试验结果相比,理论计算的精度较高,可以用于零件概念设计阶段的刚度计算,并可以有效地缩短开发周期。

参考文献 (References)

[1] 廖 芳,王 承,高世杰,等. 概念设计阶段扭转梁式后悬架建模方法研究 [J]. 汽车技术, 2007(11):15-18.
LIAO Fang, WANG Cheng, GAO ShiJie, et al. Study on modeling

转梁的扭转刚度分别进行了理论计算和试验,表 1 所示为其主要尺寸参数、刚度计算值和试验结果。由表可知,考虑约束扭转时的理论计算结果与测量值的偏差在 7.4% ~ 10.4% 之间,远好于只考虑自由扭转时的计算结果。

理论计算偏差主要来源于扭转截面常数 J 和翘曲截面常数 I_w 计算的简化误差。另外理论计算公式推导的假设之一是主梁为单一截面,但某些车型为了提高扭转梁疲劳寿命,采用变截面主梁设计,也造成了计算误差。

method of twist beam rear suspension in concept design [J]. Journal of Automotive Technology, 2007, (11): 15-18(In Chinese).

[2] 王 东,江 翁,汤晓飞,等. 扭转梁式半独立后悬架系统开发 [J]. 上海汽车, 2011(2):27-32.
WANG Dong, JIANG Weng, TANG XiaoFei, et al. Development of twist beam type rear suspension [J]. Journal of Shanghai Auto, 2011(2):27-32(In Chinese).

[3] 唐晓峰. 拖曳臂式扭杆梁后桥的设计流程和方法 [J]. 上海汽车, 2009(4):16-19.
TANG XiaoFeng. Design process and method of the trailing arm type rear axle [J]. Journal of Shanghai Auto, 2009(4): 16-19 (In Chinese).

[4] 赵九江,张少实,王春香. 材料力学 [M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 1992:51-85.
ZHAO JiuJiang, ZHANG ShaoShi, WANG ChunXiang. Material Mechanics [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1992:51-85(In Chinese).

[5] 陈伯真,胡毓仁. 薄壁结构力学 [M]. 上海:上海交通大学出版社, 1998:1-65.
CHEN BoZhen, HU YuRen. Mechanics of thin walled structure [M]. Shanghai:Shanghai Jiaotong University Press, 1998:1-65 (In Chinese).

[6] 任正权,裴星洙,张立.点焊薄壁构件受集中载荷或均布载荷作用式的翘曲扭转研究 [J].机械强度,2005,27(6):774-781.
REN ZhengQuan, PEI XingZhu, ZHANG Li. Study on warping torsion of spot-welded thin-walled box section beam with concentrated load or uniformly distributed load [J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(6): 774-781 (In Chinese).

[7] Hidetaka Takahashi, Xingzhu Pei, Noboru Tomioka, et al. Evaluation of torsion stiffness rigidity of spot-welded box section beam using warping torsion theory [C]//SAE. ATTCE 2001 Proceedings Volume 3:Manufacturing. Automotive & Transportation Technology Congress & Exhibition. Barcelona, Spain. 2001, USA: SAE, 2001-01-3406: 121-130.