

基于残差自适应卡尔曼滤波的结构响应重构方法

薛怡凡 殷红 祁义博 彭珍瑞

(兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

摘要:【目的】针对传统卡尔曼滤波算法应用于结构响应重构过程中需要将测量噪声协方差预设为恒值而导致重构精度低甚至滤波不收敛的问题,提出了一种基于残差自适应卡尔曼滤波算法的结构响应重构方法。【方法】首先,将残差理论与协方差匹配技术相结合,采用移动窗法对协方差匹配公式中的残差项进行近似,以实现卡尔曼增益和测量噪声协方差的自适应估计;其次,利用加速度数据对结构各个位置不同类型的响应进行重构;最后,使用二维桁架数值算例和简支梁试验算例,验证了所提方法的有效性,并将所提方法与卡尔曼滤波、移动窗卡尔曼滤波算法的响应重构效果进行对比。【结果】结果表明,所提算法能将测量噪声协方差自适应估计到真实值附近,与非自适应方法相比具有更高的结构响应重构精度。

关键词: 残差; 协方差匹配技术; 移动窗法; 自适应卡尔曼滤波; 结构响应重构

中图分类号: TH113.1 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2026.06.005

0 引言

结构健康监测 (Structural Health Monitoring, SHM) 技术在工程结构及基础设施的运行和维护中发挥着重要作用^[1]。为了实现对结构的实时健康监测,需要通过传感器系统正确地测量结构所有自由度的动态响应。然而,在实际工程中,在所有感兴趣的自由度安装传感器会受到经济因素或安装环境的制约,导致结构监测所需要的完整且有效的信息难以获得^[2]。因此,利用易安装传感器位置的有限测量响应对结构其余测点的响应进行重构,在实际工程中具有重要的意义^[3-4]。

目前,结构响应重构方法分为两大类:基于数据驱动响应重构方法和基于模型驱动的响应重构方法^{[5]2255-2266}。前者在早期需要使用大量的响应数据来训练一个黑盒模型,在使用时只需输入少量已知响应数据,便可获取更多未知的响应^[6]。后者需要构建结构的有限元模型,其核心是对结构的动态系统进行数学建模,建立动态系统“输入-输出”的数学映射关系^[7]。针对模型驱动的响应重构,国内外学者已提出多种算法方案。第1种是基于经验模态分解方法。模态分解的思想是将测量得到的响应分解为本征模态函数 (Intrinsic Mode Function, IMF) 的响应,从而建立所需位置处的响应^[8]。但在处理多通道的数据时,不能确保每个 IMF 只包含 1 个频率分量。因此需要对每个通道进行单独处理,导致效率低下。第2种是卡尔

曼滤波 (Kalman Filtering, KF) 方法。KF 是一种时域递归方法,在响应重构、载荷识别和状态估计等方面受到越来越多关注^[9]。SALEEM 等^{[5]2255-2266}设计了一种多目标传感器优化布置方法,并采用增广 KF 对三维桁架桥梁进行了有效的响应重构估计。张肖雄等^[10]在 KF 算法基础上,引入投影矩阵对观测方程进行了修正,实现了结构的实时响应重构和载荷识别。KHODARAHMI 等^[11]对传统 KF 算法和近年来多模型滤波器的研究进行了全面的综述。然而, KF 方法一般对滤波参数比较敏感,过程噪声和测量噪声的协方差矩阵对滤波器的性能有很大的影响。在实际应用中,这些协方差矩阵一般是未知的,通常通过试错调优过程来确定它们的合适值。然而,这些矩阵的选择不当可能会导致偏差估计、重构精度低甚至滤波器发散问题^[12]。因此,如何正确有效地对 KF 算法中的噪声进行估计,成为亟待解决的问题。张笑华等^[13]通过移动窗卡尔曼滤波 (Moving-Window Kalman Filtering, MWKF) 算法来估计噪声特性,完成了结构多类型响应进行重构。然而,移动窗的大小需要人为选取,这可能会导致偏差估计的问题。目前,自适应估计噪声协方差的方法可分为相关方法、最大似然方法、贝叶斯方法和协方差匹配技术^{[14]106837}。其中,协方差匹配技术已在信号处理中得到了一定的应用,是一种有效且易于实现的方法。ALMAGBILE 等^{[15]33-40}提出基于

收稿日期: 2024-12-18

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62161018); 甘肃省优秀博士基金项目 (24JRRA284)

作者简介: 薛怡凡,女,2000年生,陕西渭南人,硕士;主要研究方向为结构健康监测; E-mail: Xueyifan1123@163.com。

彭珍瑞(通信作者),男,1972年生,甘肃民勤人,博士,教授,博士研究生导师;主要研究方向为结构健康监测; E-mail: pzrui@163.com。

引用格式: 薛怡凡,殷红,祁义博,等. 基于残差自适应卡尔曼滤波的结构响应重构方法[J]. 机械强度, 2026, 48(6): 45-51.

XUE Yifan, YIN Hong, QI Yibo, et al. Structural response reconstruction method based on residual adaptive Kalman filtering[J]. Journal of Mechanical Strength, 2026, 48(6): 45-51.



免费获取

信息和残差的 GPS/INS 集成协方差匹配方案。SUN 等^[16]在协方差匹配技术的基础上,对过程噪声协方差自适应回路和测量噪声协方差自适应回路,设置 2 个系统调谐参数,加快了协方差匹配速度,并有效抑制了滤波发散。但目前协方差匹配技术在响应重构领域还没有得到应用。

基于以上背景,本文将协方差匹配技术引入响应重构中,提出一种基于残差自适应卡尔曼滤波 (Residual Adaptive Kalman Filtering, RAKF) 算法的响应重构方法。该算法将残差理论与协方差匹配技术相结合,并采用移动窗法对协方差匹配公式中的残差项进行近似,达到对卡尔曼增益和测量噪声协方差的自适应估计的目的,提高响应重构在噪声未知情况下的重构可靠性及鲁棒性,并分别通过数值模型和试验模型对所提方法的可行性进行了验证。

1 残差自适应卡尔曼滤波响应重构

1.1 卡尔曼滤波算法

线性离散状态空间方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}_k$ 、 $\mathbf{y}_k$ 、 $\mathbf{u}_k$ 分别为第 k 时刻的离散状态向量、观测向量、外部激励向量; $\mathbf{A}_k$ 为离散状态传输矩阵; $\mathbf{B}_k$ 为将输入向量与状态向量联系起来的输入矩阵; $\mathbf{C}_k$ 为将状态变量反映为观测向量的观测矩阵; $\mathbf{D}_k$ 为直接传输矩阵。过程噪声 $\mathbf{w}_k$ 的协方差矩阵为 $\mathbf{Q}_k$, 测量噪声 $\mathbf{v}_k$ 的协方差矩阵为 $\mathbf{R}_k$, 将过程噪声和测量噪声均假设为高斯白噪声。

KF 算法是工程结构中最常用的最小方差无偏估计之一,可估计最优状态向量。该算法一般包括时间更新和测量更新两个部分。在利用式(1)计算每个时间点的离散系统方程后,通过时间更新步和测量更新步进行递归 KF 迭代,得到最优状态估计。时间更新步和测量更新步如式(2)、式(3)所示。

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1}^- \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - (\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k)] \\ \mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k] \mathbf{P}_k^- \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 、 $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ 分别为先验及后验状态的估计值; $\mathbf{P}_k^-$ 、 $\mathbf{P}_k^+$ 分别为先验及后验估计误差的协方差矩阵; $\mathbf{K}_k$ 为卡尔曼滤波增益; $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

需要注意的是, $\mathbf{Q}_k$ 和 $\mathbf{R}_k$ 通常是通过大量试验的统计特性或凭经验选取的。但在实际应用中,这两项是未知的,且滤波参数的选择很容易影响滤波器的性能,甚至可能会导致其发散。对于具有定常参数的系统,虽然过程噪声方差 $\mathbf{Q}_k$ 可以理想地设为零,但建议将 $\mathbf{Q}_k$

设为一个较小的非零值,以便提高滤波器的收敛性^{[14]106837}。

1.2 残差协方差匹配技术

协方差匹配技术的关键思想是使测量噪声 $\mathbf{v}_k$ 的协方差的估计值与理论值保持一致,且该技术已经在电气工程和土木工程中通过双滤波方法验证了其有效性^[17]。本文将协方差匹配技术引入 KF 算法中,以期解决使用传统 KF 算法进行响应重构时测量噪声需凭经验选取并假定为恒值的问题,从而实现对测量噪声协方差 $\mathbf{R}_k$ 的自适应估计。

残差定义为真实测量值与滤波估计观测值之间的差异。残差计算中的滤波估计观测值指的是进行完整的卡尔曼滤波后,依据滤波结果对误差状态值更新,再根据相应公式计算的观测值。在卡尔曼滤波中, k 时刻的残差 $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^+ = \mathbf{y}_k - (\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k) \quad (4)$$

式中, $\hat{\mathbf{y}}_k^+$ 为滤波后验估计值。

首先,定义先验状态误差和后验状态误差分别为 $\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$ 、 $\mathbf{e}_k^+ = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+$, 则 k 时刻的残差可以表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_k &= \mathbf{y}_k - (\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k) = \\ &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k - (\mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k) = \\ &= \mathbf{C}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+) + \mathbf{v}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (5)$$

因此,残差协方差 $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T]$ 可表示为

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] &= E[(\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ + \mathbf{v}_k)(\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ + \mathbf{v}_k)^T] = \\ &= E[\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{e}_k^{+T} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T + \mathbf{v}_k \mathbf{e}_k^{+T} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \\ &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{C}_k^T + E[\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T] + E[\mathbf{v}_k \mathbf{e}_k^{+T} \mathbf{C}_k^T] + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (6)$$

将式(6)中的 $E[\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T]$ 展开,可得

$$\begin{aligned} E[\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T] &= \mathbf{C}_k E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+) \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{C}_k E[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T - \hat{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{v}_k^T] = \\ &= -\mathbf{C}_k E[\hat{\mathbf{x}}_k^+ \mathbf{v}_k^T] = -\mathbf{C}_k E[(\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k)) \mathbf{v}_k^T] = \\ &= -\mathbf{C}_k (E[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T] + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{v}_k^T] + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]) = -\mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (7)$$

由于先验估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 和先验误差 $\mathbf{e}_k^-$ 均与 $\mathbf{v}_k$ 不相关,所以 $E[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T] = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{v}_k^T] = 0$ 。由于 $\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T = (\mathbf{v}_k \mathbf{e}_k^{+T} \mathbf{C}_k^T)^T$, 可得

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}_k \mathbf{e}_k^{+T} \mathbf{C}_k^T] &= E[(\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T)^T] = E[\mathbf{C}_k \mathbf{e}_k^+ \mathbf{v}_k^T]^T = \\ &= (-\mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k)^T = -\mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T \end{aligned} \quad (8)$$

将式(7)、式(8)的结果代入式(6)中,可得

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{C}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \\ &= \mathbf{C}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \\ &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) - \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \\ &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) - \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \\ &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T = \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{C}_k^T = \mathbf{R}_k - (\mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k)^T = \\ &= \mathbf{R}_k - [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{R}_k]^T = \mathbf{R}_k - (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{C}_k^T)^T = \mathbf{R}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{C}_k^T \end{aligned} \quad (9)$$

在 KF 算法中,由于估计不确定性, $\mathbf{P}_k^+$ 通常随着更新步的增加而逐渐减小,因此 $\mathbf{P}_k^-$ 与 $\mathbf{P}_k^+$ 之间的差异通常

很小,可以忽略不计^{[14]106837}。可用 $C_k P_k^- C_k^T$ 替换 $C_k P_k^+ C_k^T$ 来得到基于残差的协方差匹配表达式,即

$$R_k = E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] + C_k P_k^- C_k^T \quad (10)$$

根据式(10),可以在每一个更新步中使用残差项来估计测量噪声协方差 R_k 。

1.3 残差自适应卡尔曼滤波算法

传统 KF 算法噪声特性不易确定,可能会导致在响应重构过程中滤波精度低或滤波不收敛问题,而 MWKF 虽然采用移动窗口法对噪声进行了估计,但窗口的大小需要凭经验选取,无法进行自适应估计。为解决上述问题,本文基于第 1.2 节残差协方差匹配技术,提出了 RAKF 算法,该算法通过对残差项的不断修正,达到对测量噪声协方差进行自适应调整的目的,从而在 KF 的更新步中得到了状态估计更新。

由式(10)可知,可以通过不断计算残差项来更新测量噪声协方差 R_k ,而残差协方差 $E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T]$ 可以在移动窗口内近似得到^{[15]33-40[18]},则式(10)也可表示为

$$R_k = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_{k-i} \varepsilon_{k-i}^T + C_k P_k^- C_k^T \quad (11)$$

式中, m 为移动窗口的长度。一般来说,较大的移动窗长度 m 能够强化统计平滑作用,使所估计的 R_k 变化更加平滑、更慢。将式(11)代入式(3)中,得到更新后的卡尔曼增益 K_k 为

$$K_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1} \quad (12)$$

则更新后的最优状态估计值 $\hat{x}_k$ 为

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - (C_k \hat{x}_k^- + D_k u_k)] \quad (13)$$

综上所述,所提 RAKF 算法框架如下:

给定初值: x_0, P_0

k 循环 ($k=1, 2, 3, \dots, N-1$):

1. 预测步

(1.1) 估计预测状态: $\hat{x}_k^- = A_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1}$

(1.2) 估计预测误差协方差: $P_k^- = A_k P_{k-1}^- A_k^T + Q_k$

2. 更新步

(2.1) 估计卡尔曼增益矩阵: $K_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1}$

(2.2) 估计状态向量: $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - (C_k \hat{x}_k^- + D_k u_k)]$

(2.3) 估计状态向量的协方差: $P_k = P_k^- - K_k C_k P_k^-$

3. 残差自适应卡尔曼滤波算法

(3.1) 计算后验观测向量: $\hat{y}_k^+ = C_k \hat{x}_k^+ + D_k u_{k-1}$

(3.2) 计算残差: $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k^+$

(3.3) 基于残差协方差匹配技术,自适应估计测量噪声协方差:

$R_k = E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] + C_k P_k^- C_k^T$, 采用移动窗口法对残差进行近似:

$$R_k = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_{k-i} \varepsilon_{k-i}^T + C_k P_k^- C_k^T$$

4. 估计更新后的状态

(4.1) 计算更新后的卡尔曼增益矩阵: $K_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + R_k)^{-1}$

(4.2) 计算更新后的状态: $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - (C_k \hat{x}_k^- + D_k u_k)]$

结束 k 循环

其中, x_0, P_0 为输入初始化向量。

1.4 响应重构理论

由式(1)可以得到测量方程和重构方程为

$$\begin{cases} y_k^r = C_k^r x_k + D_k^r u_k + v_k \\ y_k^e = C_k^e \hat{x}_k + D_k^e u_k \end{cases} \quad (14)$$

式中,上标 r、e 分别为测量位置和目标位置; C_k^r 、 C_k^e 分别为测量位置和目标位置的输出矩阵; D_k^r 、 D_k^e 分别为测量和目标位置的直接传输矩阵; y_k^r 、 y_k^e 分别为传感器测量位置的测量响应和目标位置的重构响应。为衡量重构响应的精度,引入相对百分比误差 (Relative Percentage Error, RPE), 其计算式为

$$E_{RPE} = \frac{V_{std}(y_k^e - y_k^r)}{V_{std}(y_k^r)} \quad (15)$$

式中, $V_{std}(\cdot)$ 为标准差。

2 数值算例

为验证所提算法的有效性和可靠性,采用起重机二维桁架为数值算例进行结构响应重构。有限元桁架模型由腹杆和弦杆组成,两者的横截面积分别为 3 cm^2 和 2 cm^2 ; 弹性模量分别为 210 GPa 和 70 GPa ; 密度均为 7850 kg/m^3 ; 泊松比均为 0.3 。桁架结构和随机激励施加位置如图 1 所示,该桁架共有 56 个单元, 30 个节点和 56 个自由度; 激励的频带宽度范围为 $10 \sim 250 \text{ Hz}$, 最大值为 35 N 。选取结构前 6 阶模态振型建立状态空间方程,其频率分别为 12.84 、 48.84 、 132.83 、 186.21 、 250.64 、 380.77 Hz , 并将建立的模型视为真实模型。通过式(14)计算随机传感器布置测点(即 11 节点和 24 节点)Y 方向的加速度响应,并加入均值为 0、方差为 2.56 的高斯白噪声作为测量响应。采用 RAKF 估计测量噪声协方差,为了使卡尔曼滤波器尽快收敛,将过程噪声 Q 设为一个较小的值,即 $Q = 1 \times 10^{-14}$ ^[19]。

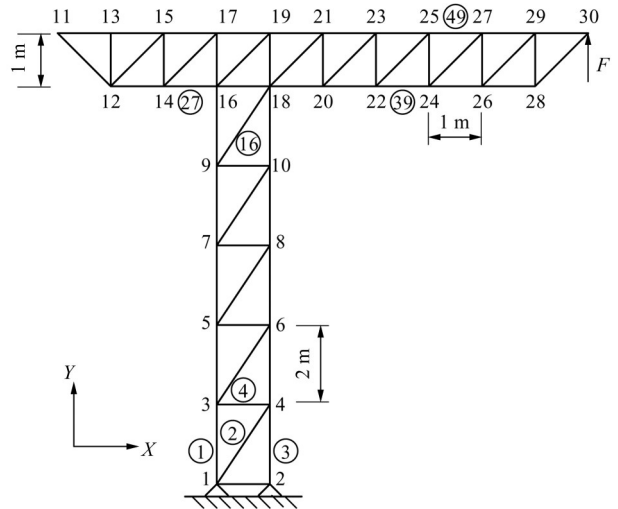


图 1 起重机二维桁架

Fig. 1 Two dimensional truss of the crane

图 2 所示为使用 RAKF 在不同的移动窗长度 m 下估计的测量噪声协方差(以标准差表示,标准差从协

方差矩阵 P_k 的对角线项中获得) 的变化情况, 其中移动窗长度 m 的取值是根据文献[14]¹⁰⁶⁸³⁷ 的建议来选取的, 分别为 5、10、20 和 30。由图 2 可知, 估计的测量噪声协方差 R_k 从初始值开始急剧变化, 并迅速达到真实值, 然后在其周围波动。与预期结果相同, 较大的窗口长度 m 能够有效提升结果平滑性。

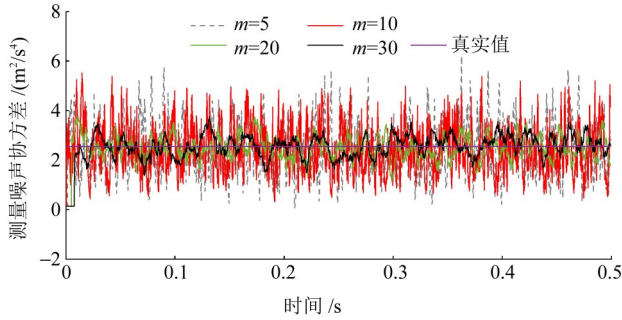
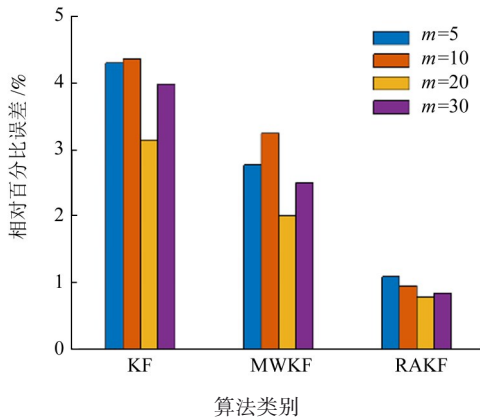


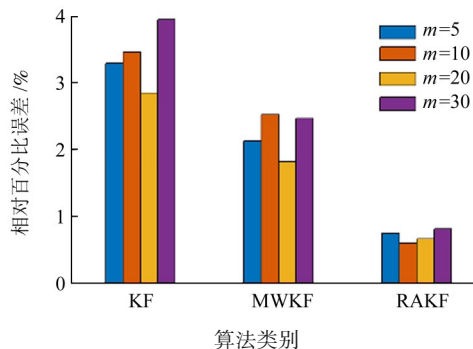
图 2 不同 m 下的测量噪声协方差

Fig. 2 Measurement noise covariance under different m

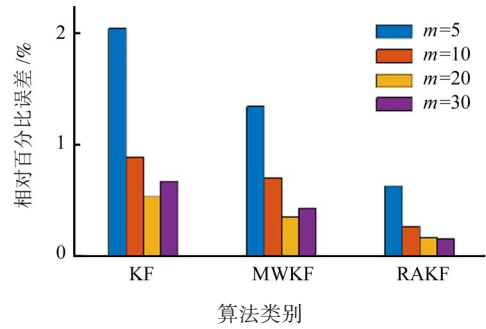
图 3 所示为不同窗口长度, 采用传统 KF、MWKF 和 RAKF 这 3 种算法对二维桁架重构的加速度、速度和位移的平均 RPE 值。由图 3 可知, 当窗口长度 m 取值不同时, 使用 RAKF 重构的桁架的加速度、速度和位移响应的平均 RPE 值均在 2% 以下。因此, 尽管 m 取值不同, 测量噪声均可通过式 (11) 自适应更新到真实值附近, 并用于结构未知测点的重构, 从而取得较好的重构精度。并且 m 的大小只与测量噪声估计的平滑度有关, 几乎不会影响响应重构的精度。



(a) 不同 m 下的加速度平均 RPE 值



(b) 不同 m 下的速度平均 RPE 值



(c) 不同 m 下位移的平均 RPE 值

图 3 不同 m 值下的平均 RPE 值

Fig. 3 Average RPE value under different m

图 4 所示为 RAKF 算法与传统 KF 算法、MWKF 算法的测量噪声协方差估计的对比。其中, 选取窗口长度 $m=30$, 使输出结果更为平滑。由图 4 可知, 传统 KF 和 MWKF 算法估计的测量噪声远远偏离了真实值, 从而导致了响应重构精度较低的问题。所提自适应方法估计的测量噪声能够在真实值附近波动。

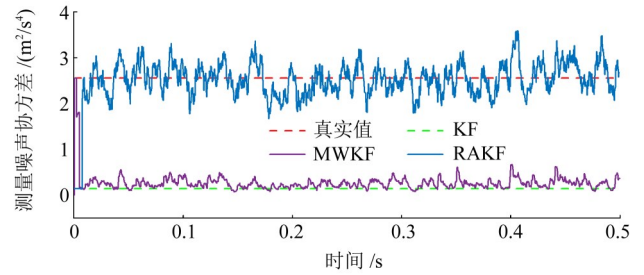


图 4 不同算法估计的测量噪声协方差

Fig. 4 Measurement noise covariance estimated by different algorithms

图 5 所示为利用 3 种方法重构得到结构全部自由度的加速度响应重构平均 RPE 值的对比。由图 5 可知, 相较于 KF 和 MWKF 这 2 种非自适应算法, 所提算法对加速度响应进行重构时的精度较高, 且最高 RPE 值不超过 2.2%。这证明了在进行多自由度的响应重构时, 使用所提方法能够较大程度地提高重构精度。

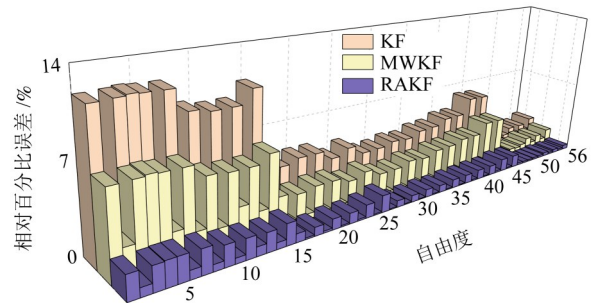


图 5 所有节点加速度响应的平均 RPE 值

Fig. 5 Average RPE values of acceleration response for all nodes

如图 6 所示, 当移动窗长度 m 为 30 时, 使用所提算法分别对 Y 方向上第 25 节点的加速度和第 21 节点的速度进行重构, 并将重构曲线与真实响应曲线之间进行了对比。由图 6 可知, 采用 RAKF 算法进行重构的响应时程曲线与真实响应时程曲线吻合情况良好,

可以在测量噪声协方差初始时刻偏离真实值时对结构响应进行重构。

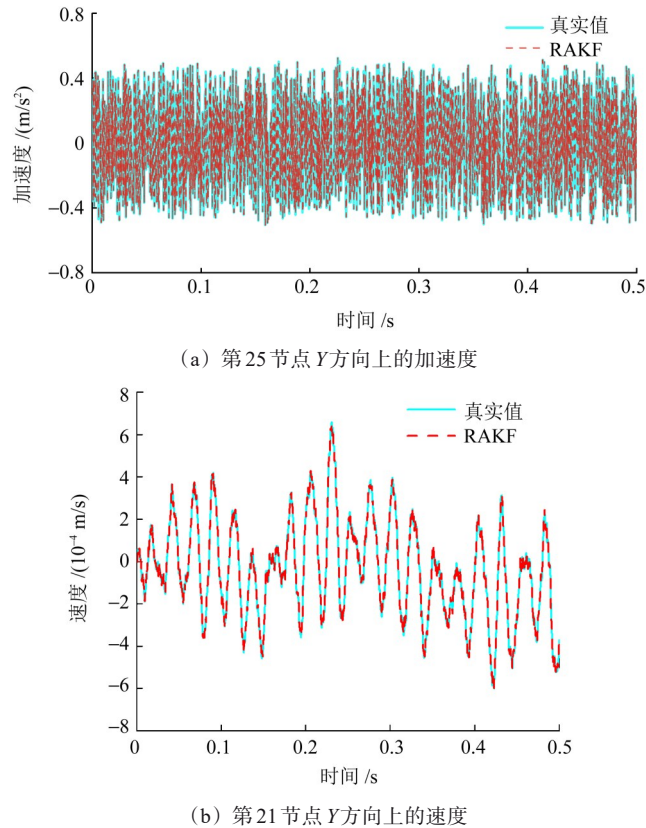


图6 RAKF算法真实响应与重构响应曲线

Fig. 6 Real response and reconstructed response curves of RAKF algorithm

通过数值算例,对所提RAKF算法与非自适应的传统KF和MWKF算法进行了对比。对比可知,当初始测量噪声协方差偏离真实值时,所提算法可以自适应估计测量噪声协方差 R_k 到真实值附近,从而提高重构精度。

3 试验验证

以简支梁作为试验验证对象,简支梁及试验设备实物如图7所示。梁的尺寸参数及传感器布置方式如图8所示,将加速度传感器分别布置于简支梁的第9和第13节点,作为试验验证的测量响应。同时,在第5和第17节点Z方向分别布置加速度传感器作为对比,以检验所提算法的重构效果。简支梁的尺寸参数和材料参数如表1所示。将简支梁划分为20个单元和21个节点,第1节点为固定约束,第21节点为简支约束。用INV9821型加速度传感器实时记录结构的加速度响应,采集仪为INV3062-C2;采样频率为4 000 Hz,采样长度为4 096。在第11节点的Z方向施加锤击激励,激励最大值为10.8 N。根据激励力的频谱分析,选取前6阶模态作为目标模态。由试验测得其前6阶模态振型的频率为8.96、26.01、57.22、97.97、152.04、214.29 Hz。

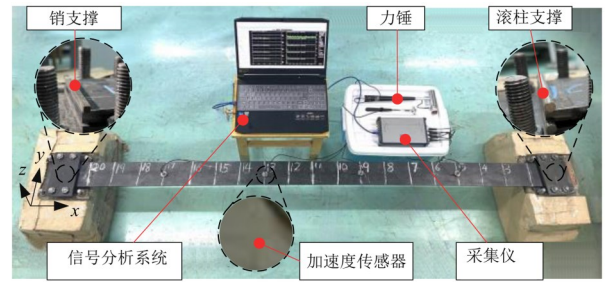


图7 简支梁及试验设备实物图

Fig. 7 Physical diagram of the simply supported beam and test equipment

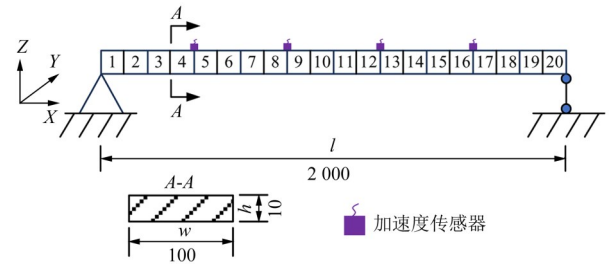


图8 简支梁结构示意图(单位:mm)

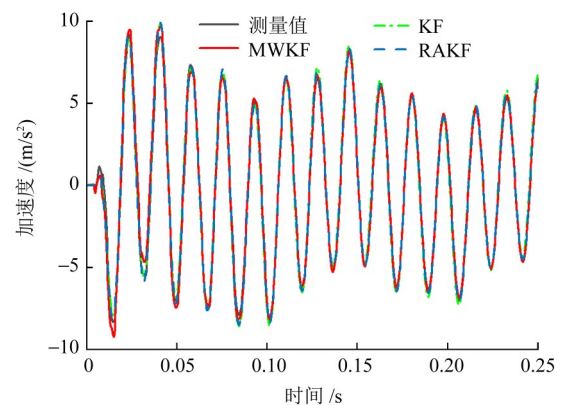
Fig. 8 Schematic diagram of the simply supported beam structure (Unit: mm)

表1 简支梁参数

Tab. 1 Parameters of the simply supported beam

长度/mm	宽度/mm	高度/mm	密度/(kg/m³)	弹性模量/GPa	泊松比
2 000	100	10	6 440	128	0.3

选取移动窗口长度 $m=30$ 为自适应方法的参数。由数值算例可知,此时估计的测量噪声协方差 R_k 曲线变化更平缓。使用RAKF算法分别对简支梁第5和第17节点不同类型的响应进行重构。采用所提算法得到的重构响应曲线与测量响应的时程结果对比如图9所示。由图9可知,加速度和速度的重构数据与测量数据之间的误差较小,曲线均吻合良好。表2所示为3种不同算法分别第5节点和第17节点的平均RPE值。由表2可知,所提RAKF算法的重构平均RPE值均低于非自适应KF和MWKF算法,这证明了与非自适应算法相比,所提方法能在初始测量噪声协方差 R_k 的选取偏离真实值时,不断递推估计真实测量噪声协方差,以保证响应重构的精度。



(a) 第17节点的加速度

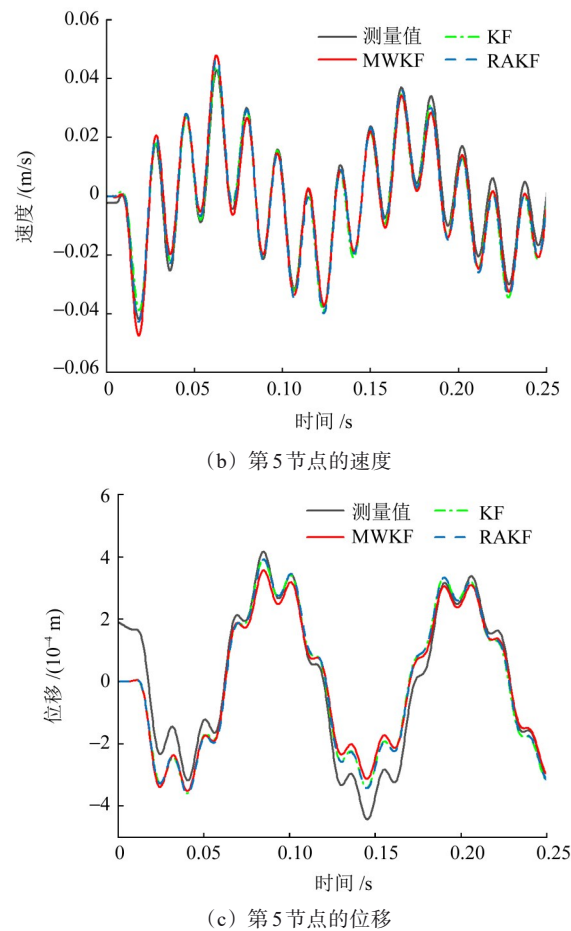


图9 重构响应与测量响应时程曲线

Fig. 9 Time-history curves of the reconstructed and measured responses

表2 重构响应与测量响应的平均RPE值

Tab. 2 Average RPE value of the reconstructed and measured responses

响应类型	节点编号	平均RPE/%		
		KF算法	MWKF算法	RAKF算法
加速度	5	9.70	8.19	5.02
	17	7.66	7.39	6.07
速度	5	16.51	16.09	13.90
	17	19.08	17.83	15.93
位移	5	30.98	30.83	28.56
	17	30.71	29.87	27.77

4 结论

针对传统KF算法的测量噪声特性难以确定而导致的滤波精度低甚至滤波不收敛的问题,引入残差协方差匹配技术,实现了测量噪声协方差的自适应估计,进而对未知测点的结构响应进行了有效重构。得出的主要结论如下:

1)在二维桁架数值算例中,基于RAKF算法对所有节点的加速度响应进行重构,得到的所有节点的平均RPE值均在2.2%以下,而使用传统KF和MWKF算法重构的加速度响应最高RPE值分别超过了14%

和10%。因此,所提算法与非自适应方法相比,具有更高的重构精度。

2)所提算法在不同窗口长度 m 下,测量噪声均可自适应更新到真实值附近,并可以取得较好的响应重构精度。 m 的取值仅影响测量噪声曲线的平缓程度,较大的 m 能使测量噪声估计更加平滑,测量噪声曲线变化更加平缓。

3)通过数值算例和试验验证可以得出,与非自适应的KF和MWKF方法相比,所提的残差自适应KF算法在使用偏离真实测量噪声协方差时,能够自适应估计真实测量噪声协方差,进而达到提高结构响应重构精度的目的。

参考文献(References)

[1] 干露,陈辉. 基于贝叶斯方法的统计模型修正和结构概率损伤识别[J]. 机械强度,2022,44(1):133-139.
GAN Lu, CHEN Hui. Statistical model updating and structural probabilistic damage identification based on Bayesian method[J]. Journal of Mechanical Strength, 2022, 44 (1) : 133-139. (In Chinese)

[2] 李惠,鲍跃全,李顺龙,等. 结构健康监测数据科学与工程[J]. 工程力学,2015,32(8):1-7.
LI Hui, BAO Yuequan, LI Shunlong, et al. Data science and engineering for structural health monitoring [J]. Engineering Mechanics,2015,32(8):1-7. (In Chinese)

[3] 刘满东,彭珍瑞. 基于激励点优化和信号能量的结构损伤识别[J]. 机械强度,2021,43(3):554-560.
LIU Mandong, PENG Zhenrui. Structural damage detection based on the excitation points optimization and energy of signals [J]. Journal of Mechanical Strength, 2021, 43 (3) : 554-560. (In Chinese)

[4] SUN L M, LI Y X, ZHU W, et al. Structural response reconstruction in physical coordinate from deficient measurements [J]. Engineering Structures,2020,212:110484.

[5] SALEEM M M, JO H. Multi-objective sensor placement optimization for structural response estimation under spatially varying dynamic loading of bridges [J]. Advances in Structural Engineering,2021,24(10):2255-2266.

[6] 单伽铨,张茜,吕西林,等. 多元特征驱动的超高层建筑变形状态智能学习与预测[J]. 建筑结构学报,2024,45(3):101-112.
SHAN Jiazeng, ZHANG Xi, LÜ Xilin, et al. Multi-feature driven intelligent learning and prediction of deformation state of super-tall buildings [J]. Journal of Building Structures, 2024, 45 (3) : 101-112. (In Chinese)

[7] 彭珍瑞,车佳亮. 最优过程噪声协方差Q估计下的结构响应重构[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2025,52(10):31-42.
PENG Zhenrui, CHE Jialiang. Structural response reconstruction under optimal process noise covariance Q estimation[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2025, 52 (10) : 31-42. (In Chinese)

[8] 邹云峰,卢玄东,阳劲松,等. 基于模态综合法和模态叠加法的密集模态结构响应重构[J]. 工程力学,2023,40(3):54-64.

- ZOU Yunfeng, LU Xuandong, YANG Jinsong, et al. Structural response reconstruction based on mode synthesis method and modal superposition method in the presence of closely spaced modes [J]. *Engineering Mechanics*, 2023, 40 (3) : 54-64. (In Chinese)
- [9] CHEN X D, PAN C D, PENG S X, et al. Structural response reconstruction of beam-like bridge based on equivalent loads under moving forces[J]. *Structures*, 2024, 67: 107026.
- [10] 张肖雄, 贺佳, 齐梦晨. 基于KF的非线性结构响应重构和外激励识别研究[J]. *建筑结构学报*, 2020, 41(11): 143-149.
ZHANG Xiaoxiong, HE Jia, QI Mengchen. Study on KF-based responses reconstruction of nonlinear structure and external excitation identification [J]. *Journal of Building Structures*, 2020, 41(11): 143-149. (In Chinese)
- [11] KHODARAHMI M, MAIHAMI V. A review on Kalman filter models [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2023, 30(1): 727-747.
- [12] 丁怡渊, 殷红, 彭珍瑞. 基于新息自适应卡尔曼滤波算法的多类型结构响应重构[J]. *计算力学学报*, 2023, 40(5): 757-763.
DING Yiyuan, YIN Hong, PENG Zhenrui. Multi-type structural response reconstruction based on innovation adaptive Kalman filtering algorithm [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, 40(5): 757-763. (In Chinese)
- [13] 张笑华, 吴志彪, 吴圣斌, 等. 基于移动窗卡尔曼滤波算法的结构响应重构[J]. *振动与冲击*, 2021, 40(21): 90-96.
- ZHANG Xiaohua, WU Zhibiao, WU Shengbin, et al. Structural response reconstruction based on moving window Kalman filtering algorithm [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(21): 90-96. (In Chinese)
- [14] SONG M M, ASTROZA R, EBRAHIMIAN H, et al. Adaptive Kalman filters for nonlinear finite element model updating [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 143: 106837.
- [15] ALMAGBILE A, WANG J L, DING W D. Evaluating the performances of adaptive Kalman filter methods in GPS/INS integration [J]. *Journal of Global Positioning Systems*, 2010, 9(1): 33-40.
- [16] SUN W, SUN P L, WU J J. An adaptive fusion attitude and heading measurement method of MEMS/GNSS based on covariance matching [J]. *Micromachines*, 2022, 13(10): 1787.
- [17] ASTROZA R, ALESSANDRI A, CONTE J P. A dual adaptive filtering approach for nonlinear finite element model updating accounting for modeling uncertainty [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 115: 782-800.
- [18] MEHRA R K. Approaches to adaptive filtering [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(5): 693-698.
- [19] FU H P, CHENG Y M. Variational adaptive Kalman filter for unknown measurement loss and inaccurate noise statistics [J]. *Signal Processing*, 2023, 212: 109184.

Structural response reconstruction method based on residual adaptive Kalman filtering

XUE Yifan YIN Hong QI Yibo PENG Zhenrui

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: [Objective] Aiming at the problem that the traditional Kalman filtering algorithm applied in the process of structural response reconstruction needs to preset the measurement noise covariance to a constant value, which leads to low reconstruction accuracy or even non-convergence of filtering, a structural response reconstruction method based on residual adaptive Kalman filtering algorithm was proposed. [Methods] Firstly, the residual theory was combined with the covariance matching technique and the moving window method was used to approximate the residual terms in the covariance matching formulae to achieve adaptive estimation of the Kalman gain and measurement noise covariance. Then, the acceleration data were used to reconstruct the different types of responses at each position of the structure. Finally, the proposed method was validated through a numerical example of a two-dimensional truss and an experimental example of a simply supported beam, comparing the response reconstruction effects with those of Kalman filtering and moving window Kalman filtering algorithms. [Results] The results show that the proposed algorithm can adaptively estimate the measurement noise covariance close to the true value and achieves higher accuracy in structural response reconstruction compared to non-adaptive methods.

Key words: Residual; Covariance matching technology; Moving window method; Adaptive Kalman filtering; Structural response reconstruction

Corresponding author: PENG Zhenrui, E-mail: pzrui@163.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (62161018); Excellent Doctoral Fund Project of Gansu Province (24JRRA284)

Received: 2024-12-18

(编辑: 刘欢欢)