

压电层合壳体等几何建模及分析

刘涛¹ 许文祥¹ 蒋雅芬² 胡晓磊¹ 张顺琦³

(1. 安徽工业大学 机械工程学院, 马鞍山 243032)

[2. 安徽工业大学 创新创业学院(工程师学院)、工程实训中心, 马鞍山 243032]

(3. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200444)

摘要:【目的】传统有限元法在建模过程中存在几何不精确性和单元阶次较低的问题,在处理含有曲线或曲面的复杂几何模型时,会引入逼近误差。相较而言,等几何分析方法将非均匀有理B样条(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)基函数作为形函数,具备几何精确、高阶连续、高精度和无需传统网格划分过程等优势。因此,基于等几何分析方法和一阶剪切变形理论建立了一种能够精确预测压电层合壳体结构力-电行为的等几何分析模型,并进行相应分析。【方法】首先,利用NURBS基函数推导了Reissner-Mindlin壳单元的位移离散方程;其次,考虑材料的纤维角度,建立了从局部坐标系到全局坐标系的压电本构方程的转换关系,并采用Hamilton变分原理构建了压电层合壳体的等几何分析模型;然后,利用构建的等几何分析模型对经典壳体问题进行了分析,并将等几何分析模型的结果与已有文献和有限元软件仿真的结果进行了对比,验证了模型的精确性和高效性;最后,对机-电载荷作用下压电层合壳体的静力学和动力学响应进行了分析。【结果】数值结果表明,所建立的压电层合壳体的等几何分析模型具有较高的计算精度,并且同时适用于普通单层壳体、层合壳体及压电层合壳体等结构的分析。

关键词: 等几何分析; 一阶剪切变形理论; 压电层合壳体; 静力学响应; 动力学响应

中图分类号: TB333 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2026.04.014

0 引言

薄壁板壳结构广泛存在于航空航天、船舶和汽车等领域,如飞机机翼、航空发动机叶片、卫星太阳能帆板等。这类低阻尼结构在动力系统振动、外界高速流体压差变化等扰动下极易产生变形、振动或噪声,严重影响了产品的运行性能和可靠性^[1]。在薄壁结构上集成智能材料(如压电材料),形成的智能板壳结构具有自感知、自诊断、自驱动等能力,已广泛应用于航空航天领域飞行器壁板结构的形状控制、减振降噪和健康监测等^[2-4]。在压电智能结构计算分析中,存在着力学量与电学量的相互耦合,关系复杂,因此,建立压电智能结构的计算模型是进行力学分析和实现智能控制的关键。在压电智能结构数值法建模中,有限元法(Finite Element Method, FEM)因具有边界处理灵活、编程易实现、计算效率高等优点,应用最为广泛。

由于板壳结构在厚度方向上的尺度比其他两个方向小得多,因此可做出一定的假设,使三维单元的计算简化为二维单元的计算,在保持计算精度的同时能够大大提高计算效率。国内、外许多学者将二维等

效单层理论与有限元法相结合,建立了压电层合结构的二维数值分析模型。针对压电层合板结构,HE等^[5]基于经典理论研究了机-电-热耦合下压电层合板的静力学响应、动力学响应及主动振动控制等问题。经典理论忽略了结构的横向剪切变形,因此仅适用于薄壁结构的计算,多位学者基于一阶剪切变形理论和有限元法建立了压电层合板的数值分析模型。利用这些模型,WANG等^[6-8]采用速度反馈控制方法,探讨了压电层合板的主动振动控制问题;BEHJAT等^[9-10]分析了压电层合板的自由振动、静力学和动力学响应。考虑结构发生大变形的情况,VARELIS等^[11-12]基于一阶剪切变形理论和冯·卡门非线性理论,建立了压电层合板的几何非线性有限元模型,并对结构的几何非线性力学行为进行了分析。为克服三角形单元在有限元计算中偏“刚性”的缺陷,PHUNG-VAN等^[13-14]基于光滑有限元方法和一阶剪切变形理论,对压电层合板的力学性能进行了研讨。由于一阶剪切变形理论不适用于分析厚板,JADHAV等^[15-20]基于高阶剪切变形理论和冯·卡门非线性理论构建了压电层合板的几何非线性有限元模型,并对结构的屈曲响应、自由振动、强

收稿日期: 2024-07-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11972020); 安徽省高校自然科学基金重点项目(KJ2021A0404, KJ2021A0368)

作者简介: 刘涛,男,1987年生,陕西渭南人,博士,高级实验师; 主要研究方向为压电智能结构非线性建模方法; E-mail: lt_ahut@126.com。

引用格式: 刘涛,许文祥,蒋雅芬,等. 压电层合壳体等几何建模及分析[J]. 机械强度, 2026, 48(4): 122-133.

LIU Tao, XU Wenxiang, JIANG Yafen, et al. Isogeometric modeling and analysis of piezoelectric laminated shells [J]. Journal of Mechanical Strength, 2026, 48(4): 122-133.



免费获取

迫振动和非线性主动振动控制问题进行了分析。

针对压电层合壳体结构, KIOUA 等^{[21]476-484[22]}基于经典理论建立了线性有限元模型, 分析了结构的静态和动态响应。利用一阶剪切变形理论, MARINKOVIC 等^[23-26]分析了压电层合壳体的主动振动控制问题; ZHANG 等^{[27]345-357[28]239-249[29-30]}建立一系列压电层合壳结构的几何非线性模型, 并研究了结构的非线性静力学、动力学、形状控制和主动振动控制问题。

虽然利用有限元法在压电智能结构的力学建模及分析中取得了很大的成功, 但仍然存在一定的局限性。如图 1(a) 所示, 在进行有限元分析前, 需要对几何模型进行网格化处理, 该过程通常利用拉格朗日插值函数逼近原始几何模型, 所得到的物理网格被用来实现计算机辅助工程 (Computer-Aided Engineering, CAE) 的计算分析, 但物理网格只是真实几何模型的一种近似描述 (称为逼近几何), 存在一定的逼近误差。此外, 压电智能结构的分析方法还有无网格法^[31]、边界元法^[32]和有限差分法^[33]等, 但存在分析模型和几何模型不统一的问题。与之相比, 等几何分析 (Isogeometric Analysis, IGA) 方法 [图 1(b)] 将计算机辅助设计 (Computer-Aided Design, CAD) 中的样条基函数作为 CAE 分析中的形函数, 使计算分析模型 (物理网格) 和真实几何模型得到了统一的表达, 具有几何精确、精度高、高阶连续、无需传统网格划分过程等优点^[34], 非常适合分析薄壁板壳结构。

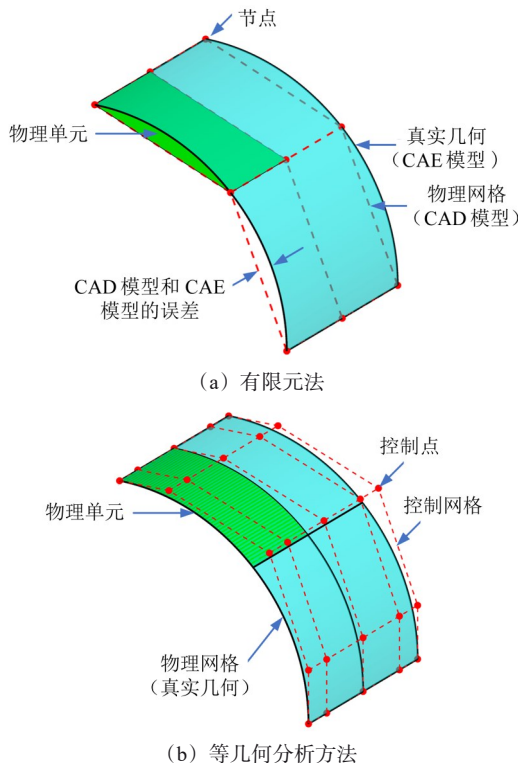


图 1 有限元法与等几何分析方法的网格对比

Fig. 1 Comparison of meshes of finite element method and isogeometric analysis method

等几何分析方法在普通板壳结构的研究中已较为成熟, 这些研究作为压电层合板壳结构的等几何建模与分析奠定了基础。目前, 已有部分研究者将等几何分析方法应用于压电层合结构的建模与分析中。基于高阶剪切变形理论, NGUYEN-QUANG 等^[35-37]针对集成压电层的碳纳米管/石墨烯增强功能梯度板的静力学、动力学响应和非线性主动振动控制问题进行了研究。LIU 等^[38-39]利用简化的一阶剪切变形理论和三阶剪切变形理论构建了压电层合板的几何非线性和双重非线性等几何模型, 并详细分析了结构的非线性频率、静力学和动力学响应。利用精化高阶剪切变形理论, 张欣宇等^[40]研究了压电功能梯度夹芯板结构的主动振动控制。由此可以看出, 当前有关压电层合结构的等几何建模及分析的研究主要集中在板结构, 而针对压电层合壳结构的研究则非常有限。但正是在含有曲线或曲面的复杂结构中, 才能体现等几何分析方法几何精确这一优势。因此, 本文基于等几何分析方法和一阶剪切变形理论, 建立压电层合壳结构的精确分析模型, 并利用该模型研究压电层合壳结构在机-电载荷作用下的静态响应和动态响应。

1 压电层合壳结构的等几何分析模型

1.1 位移场

一阶剪切变形理论也称为 Reissner-Mindlin 理论, Reissner-Mindlin 壳单元是一种考虑横向剪切变形的退化壳单元, 即不再采用三维建模方式建立壳单元, 而只对壳的中面进行二维建模, 并结合中面法线对位移场进行重构还原。如图 2 所示, 定义 3 种坐标系: 全局坐标系 $Oxyz$, 局部坐标系 $O'x'y'z'$ 和控制点 I 处的节点坐标系 $O'^0V_1^0V_2^0V_n^I$ 。其中, 局部坐标系 $O'x'y'z'$ 用于定义局部坐标系中的应力和应变, 节点坐标系 $O'^0V_1^0V_2^0V_n^I$ 用于定义控制点的转动自由度 β_x 和 β_y 。

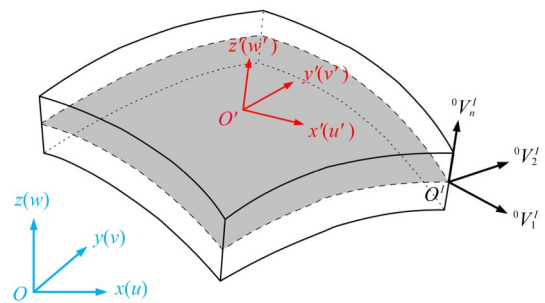


图 2 Reissner-Mindlin 壳单元

Fig. 2 Reissner-Mindlin shell element

壳体中的任意一点可由中面上的点沿该点处的法向量平移得到。因此, 壳单元内任意一点的坐标在全局坐标系中可表示为

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l=1}^{m' \times n'} R_l(\xi, \eta) \mathbf{P}_l + \frac{h}{2} \zeta \sum_{l=1}^{m' \times n'} R_l(\xi, \eta) {}^l \mathbf{V}_n^l \quad (1)$$

式中, ξ, η 分别为长度、宽度方向上的参数坐标; $R_l(\xi, \eta)$ 和 \mathbf{P}_l 分别为第 l 个控制点的 NURBS 基函数和坐标; $m' \times n'$ 为单元内的控制点数; h 为壳体的厚度; ζ 为厚度方向上的参数坐标, $\zeta \in [-1, 1]$; ${}^l \mathbf{V}_n^l$ 为控制点 l 处的单位法向量, 其中, l' 用于表示单元的位形, $l' = 0$ 表示初始构型; $l' = 1$ 表示最终构型。

单元位移 $\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)$ 可通过最终构型与初始构型的坐标差表示, 即

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l=1}^{m' \times n'} R_l(\xi, \eta) \mathbf{u}_l + \frac{h}{2} \zeta \sum_{l=1}^{m' \times n'} R_l(\xi, \eta) \mathbf{V}_{in}^l \quad (2)$$

式中, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$; $\mathbf{u}_l = \{u_l, v_l, w_l\}^T$ 为控制点 l 上的平动位移; \mathbf{V}_{in}^l 为方向余弦增量。

方向余弦增量 \mathbf{V}_{in}^l 可通过 ${}^0 \mathbf{V}_{in}^l$ 在控制点 l 处的转动表示。如图 3 所示, 定义 ${}^0 \mathbf{V}_1^l$ 和 ${}^0 \mathbf{V}_2^l$ 为垂直于 ${}^0 \mathbf{V}_{in}^l$ 的两个单位向量, β_{x_l} 和 β_{y_l} 分别表示节点坐标系下 ${}^0 \mathbf{V}_{in}^l$ 绕 ${}^0 \mathbf{V}_1^l$ 和 ${}^0 \mathbf{V}_2^l$ 的转角。在小转动条件下, β_{x_l} 和 β_{y_l} 都是小量, 因此

$$\mathbf{V}_{in}^l = -{}^0 \mathbf{V}_2^l \beta_{x_l} + {}^0 \mathbf{V}_1^l \beta_{y_l} \quad (3)$$



图 3 第 l 个控制点处的转角

Fig. 3 Rotation angle at the l -th control point

其中,

$${}^0 \mathbf{V}_1^l = \begin{Bmatrix} {}^0 \mathbf{V}_{1x}^l \\ {}^0 \mathbf{V}_{1y}^l \\ {}^0 \mathbf{V}_{1z}^l \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{j} \times {}^0 \mathbf{V}_{in}^l}{\|\mathbf{j} \times {}^0 \mathbf{V}_{in}^l\|_2} \quad (4a)$$

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} R_{l,x} & 0 & 0 & -\bar{R}_{l,x} {}^0 \mathbf{V}_{2x}^l & \bar{R}_{l,x} {}^0 \mathbf{V}_{1x}^l \\ 0 & R_{l,y} & 0 & -\bar{R}_{l,y} {}^0 \mathbf{V}_{2y}^l & \bar{R}_{l,y} {}^0 \mathbf{V}_{1y}^l \\ 0 & 0 & R_{l,z} & -\bar{R}_{l,z} {}^0 \mathbf{V}_{2z}^l & \bar{R}_{l,z} {}^0 \mathbf{V}_{1z}^l \\ R_{l,y} & R_{l,x} & 0 & -\bar{R}_{l,y} {}^0 \mathbf{V}_{2x}^l - \bar{R}_{l,x} {}^0 \mathbf{V}_{2y}^l & \bar{R}_{l,y} {}^0 \mathbf{V}_{1x}^l + \bar{R}_{l,x} {}^0 \mathbf{V}_{1y}^l \\ 0 & R_{l,z} & R_{l,y} & -\bar{R}_{l,z} {}^0 \mathbf{V}_{2y}^l - \bar{R}_{l,y} {}^0 \mathbf{V}_{2z}^l & \bar{R}_{l,z} {}^0 \mathbf{V}_{1y}^l + \bar{R}_{l,y} {}^0 \mathbf{V}_{1z}^l \\ R_{l,z} & 0 & R_{l,x} & -\bar{R}_{l,z} {}^0 \mathbf{V}_{2x}^l - \bar{R}_{l,x} {}^0 \mathbf{V}_{2z}^l & \bar{R}_{l,z} {}^0 \mathbf{V}_{1x}^l + \bar{R}_{l,x} {}^0 \mathbf{V}_{1z}^l \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, 下标“ x ”“ y ”“ z ”分别表示对 x, y, z 求偏导数;

$\bar{R}_{l,x} = \frac{h}{2} (\zeta_{,x} R_l + \zeta R_{l,x})$; 其余偏导数的表达式类似。

求解基函数 R_l 和参数坐标 ζ 对坐标 x, y, z 的导数, 需要计算参数域与物理域之间变换的雅可比矩阵 \mathbf{J} , 其表示为

$${}^0 \mathbf{V}_2^l = \begin{Bmatrix} {}^0 \mathbf{V}_{2x}^l \\ {}^0 \mathbf{V}_{2y}^l \\ {}^0 \mathbf{V}_{2z}^l \end{Bmatrix} = \frac{{}^0 \mathbf{V}_1^l \times {}^0 \mathbf{V}_{in}^l}{\|{}^0 \mathbf{V}_1^l \times {}^0 \mathbf{V}_{in}^l\|_2} \quad (4b)$$

式中, \mathbf{j} 为 y 轴方向上的单位矢量。对于 ${}^0 \mathbf{V}_{in}^l$ 平行于 y 轴的特殊情况, 可定义 ${}^0 \mathbf{V}_{in}^l = \mathbf{k}$, 其中, \mathbf{k} 为 z 轴方向上的单位矢量。

将式(3)代入式(2), 得到最终壳单元的位移场为

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^{m' \times n'} R_l [\mathbf{u}_l + \frac{h}{2} \zeta (-{}^0 \mathbf{V}_2^l \beta_{x_l} + {}^0 \mathbf{V}_1^l \beta_{y_l})] \quad (5)$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^{m' \times n'} \begin{bmatrix} R_l & 0 & 0 & -\bar{R}_l {}^0 \mathbf{V}_{2x}^l & \bar{R}_l {}^0 \mathbf{V}_{1x}^l \\ 0 & R_l & 0 & -\bar{R}_l {}^0 \mathbf{V}_{2y}^l & \bar{R}_l {}^0 \mathbf{V}_{1y}^l \\ 0 & 0 & R_l & -\bar{R}_l {}^0 \mathbf{V}_{2z}^l & \bar{R}_l {}^0 \mathbf{V}_{1z}^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ v_l \\ w_l \\ \beta_{x_l} \\ \beta_{y_l} \end{Bmatrix} =$$

$$\sum_{l=1}^{m' \times n'} \bar{\mathbf{R}}_l \mathbf{d}_l = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{d} \quad (6)$$

式中, $\bar{\mathbf{R}}_l = \frac{h}{2} \zeta R_l$; \mathbf{d}_l 为第 l 个控制点处的自由度; \mathbf{d} 为单元上的位移矢量, $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1^T \cdots \mathbf{d}_l^T \cdots \mathbf{d}_{m' \times n'}^T]^T$; $\bar{\mathbf{R}} = [\bar{\mathbf{R}}_1 \cdots \bar{\mathbf{R}}_l \cdots \bar{\mathbf{R}}_{m' \times n}]$ 。

1.2 应变场

压电层合壳体应变-位移关系表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy} \quad \boldsymbol{\gamma}_{yz} \quad \boldsymbol{\gamma}_{zx}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{l=1}^{m' \times n'} \mathbf{B}_l \mathbf{d}_l = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (8)$$

式中,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_l \cdots \mathbf{B}_{m' \times n}] \quad (9)$$

其中,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{, \eta} & y_{, \eta} & z_{, \eta} \\ x_{, \zeta} & y_{, \zeta} & z_{, \zeta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, 下标“ ξ ”“ η ”“ ζ ”分别表示对 ξ, η, ζ 求偏导数。

1.3 本构关系

压电弹性连续体在全局坐标系下的压电本构方程为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{g}\mathbf{E} \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别为应力和应变; \mathbf{Q} 为全局弹性系数矩阵; \mathbf{e} 为压电应变系数矩阵; \mathbf{D} 为电位移矢量; \mathbf{g} 为介电系数矩阵; \mathbf{E} 为电场矢量。

为引入壳体理论中沿法线方向正应力为零的假设, 应在以法向为轴的局部坐标系中计算应变和应力。在局部坐标系下, 压电材料的应力可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}'\boldsymbol{\varepsilon}' - \mathbf{e}'^T \mathbf{E} \quad (13)$$

式中, 上标“'”表示局部坐标系下的相应物理量。

本文采用沿厚度方向极化的压电陶瓷材料, 因此, 电场矢量 \mathbf{E} 可以表示为

$$\mathbf{E} = \{0 \quad 0 \quad E_z\}^T = \{0 \quad 0 \quad -1/h_p\}^T \phi = \mathbf{B}_\phi \phi \quad (14)$$

式中, ϕ 为压电材料厚度方向上所施加的电压; h_p 为压电材料的厚度。

对于纤维增强的正交各向异性材料, 局部弹性系数矩阵 \mathbf{Q}' 和压电应变系数矩阵 \mathbf{e}' 可分别表示为

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{T}_1 \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}_1^T, \mathbf{e}' = \hat{\mathbf{e}} \mathbf{T}_1^T \quad (15)$$

式中,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -2sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ sc & -sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{24} & 0 \\ \hat{e}_{31} & \hat{e}_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{T}_{sh} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

将式(23)代入式(12)、式(13)后, 全局弹性系数矩阵 \mathbf{Q} 和压电应变系数矩阵 \mathbf{e} 可分别表示为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_{sh}^T \mathbf{Q}' \mathbf{T}_{sh}, \mathbf{e} = \mathbf{e}' \mathbf{T}_{sh} \quad (25)$$

1.4 控制方程

压电层合壳结构控制方程的推导可利用哈密顿

式中, $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, 其中, θ 为纤维角度。 $\hat{\mathbf{Q}}$ 中各非零元素的表达式为

$$\begin{cases} \hat{Q}_{11} = \frac{Y_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \hat{Q}_{12} = \frac{\nu_{12}Y_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ \hat{Q}_{21} = \frac{\nu_{21}Y_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \hat{Q}_{22} = \frac{Y_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ \hat{Q}_{66} = G_{12}, \hat{Q}_{44} = kG_{23}, \hat{Q}_{55} = kG_{13} \end{cases} \quad (19)$$

式中, Y_1 、 Y_2 为弹性模量; G_{12} 、 G_{23} 、 G_{13} 为剪切模量; ν_{12} 、 ν_{21} 为泊松比; k 为剪切修正系数, $k = 1.2$ 。

由于只考虑厚度方向的电场, 忽略 \hat{e}_{24} 和 \hat{e}_{15} 的作用, \hat{e}_{31} 和 \hat{e}_{32} 可分别表示为

$$\hat{e}_{31} = d'_{31} \hat{Q}_{11} + d'_{32} \hat{Q}_{12}, \hat{e}_{32} = d'_{31} \hat{Q}_{12} + d'_{32} \hat{Q}_{22} \quad (20)$$

式中, d'_{31} 、 d'_{32} 为压电应变系数。

全局坐标系下位移的偏导数与局部坐标系下位移的偏导数之间的关系为

$$\begin{bmatrix} u'_{,x} & v'_{,x} & w'_{,x} \\ u'_{,y} & v'_{,y} & w'_{,y} \\ u'_{,z} & v'_{,z} & w'_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (21)$$

式中, $\mathbf{P} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{n}]$ 为全局坐标系和局部坐标系之间的转换矩阵, 其中,

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}\|_2} \\ \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi}}{\|\mathbf{x}_{,\xi}\|_2} \\ \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 \end{cases} \quad (22)$$

根据式(21), 可以得到应力、应变在局部坐标系与全局坐标系的转换关系, 表示为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}_{sh} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}_{sh} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (23)$$

式中, 矩阵 \mathbf{T}_{sh} 可表示为

变分原理。哈密顿变分原理的表达式为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{T} - \mathbf{U} + \mathbf{W}_{ext}) dt = 0 \quad (26)$$

式中, δ 为变分符号; t 为积分时间; t_1 和 t_2 分别为时间轴上的某 2 个时刻; \mathbf{L} 为总能量, 包括动能 \mathbf{T} 、势能 \mathbf{U} 、外

力所做的功 W_{ext} 。 T 、 U 、 W_{ext} 的表达式分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^T \dot{u} dV \quad (27)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV \quad (28)$$

$$W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s d\Omega + \sum \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_c + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_b dV - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q}_s d\Omega - \sum \delta \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q}_c \quad (29)$$

式中, ρ 为材料的密度; V 为积分体积; Ω 为积分面积; \mathbf{f}_s 、 \mathbf{f}_c 和 \mathbf{f}_b 分别为机械面力、集中力和体力; \mathbf{q}_s 和 \mathbf{q}_c 分别为面电荷和集中电荷。

动能的变分可表示为

$$\delta T = \int_V \rho \dot{u}^T \dot{u} dV = - \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{u} dV = - \delta \mathbf{d}^T \int_V \rho \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} dV \ddot{\mathbf{d}} \quad (30)$$

势能的变分可表示为

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV = \\ &= \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e}^T \mathbf{E} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{g} \mathbf{E}) dV = \\ &= \delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 + \delta U_4 \end{aligned} \quad (31)$$

其中,

$$\delta U_1 = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (32)$$

$$\delta U_2 = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e}^T \mathbf{E} dV \quad (33)$$

$$\delta U_3 = - \int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (34)$$

$$\delta U_4 = - \int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{g} \mathbf{E} dV \quad (35)$$

将式(8)、式(14)代入式(32)~式(35), 可得

$$\delta U_1 = \int_V \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{d} dV \quad (36)$$

$$\delta U_2 = - \int_V \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\phi \boldsymbol{\phi} dV \quad (37)$$

$$\delta U_3 = - \int_V \delta \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{e} \mathbf{B} \mathbf{d} dV \quad (38)$$

$$\delta U_4 = - \int_V \delta \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{g} \mathbf{B}_\phi \boldsymbol{\phi} dV \quad (39)$$

再将式(27)~式(29)代入式(26), 得到

$$\begin{aligned} & - \delta \mathbf{d}^T \int_V \rho \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} dV \ddot{\mathbf{d}} - \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} dV \mathbf{d} + \\ & \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\phi dV \boldsymbol{\phi} + \delta \boldsymbol{\phi}^T \int_V \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{e} \mathbf{B} dV \mathbf{d} + \\ & \delta \boldsymbol{\phi}^T \int_V \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{g} \mathbf{B}_\phi dV \boldsymbol{\phi} + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}_s d\Omega + \delta \mathbf{d}^T \sum \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}_c + \\ & \delta \mathbf{d}^T \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}_b dV - \delta \boldsymbol{\phi}^T \int_{\Omega} \mathbf{q}_s d\Omega - \delta \boldsymbol{\phi}^T \sum \mathbf{q}_c = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

分别整理包含 $\delta \mathbf{d}^T$ 和 $\delta \boldsymbol{\phi}^T$ 的项, 并对单元进行组装后, 得到结构的控制方程为

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{u\phi} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}_u \quad (41)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{\phi\phi} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}_\phi \quad (42)$$

式中,

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_V \rho \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} dV \quad (43)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} dV \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\phi dV \quad (45)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} = \int_V \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{e} \mathbf{B} dV \quad (46)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \int_V \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{g} \mathbf{B}_\phi dV \quad (47)$$

$$\mathbf{F}_u = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}_s d\Omega + \sum \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}_c + \int_V \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{f}_b dV \quad (48)$$

$$\mathbf{G}_\phi = - \int_{\Omega} \mathbf{q}_s d\Omega - \sum \mathbf{q}_c \quad (49)$$

2 数值算例

首先, 通过经典壳体问题验证本文等几何模型的准确性和有效性, 并比较本文模型和有限元模型的分析结果; 其次, 利用模型分析压电层合壳结构的静态响应和动态响应, 其中动态响应采用 Newmark 直接积分法求解。若无特殊说明, 压电壳体的主体结构材料为石墨环氧树脂复合材料 T300/976, 压电材料为 G1195 型压电陶瓷, 具体的材料参数如表 1 所示。

表 1 材料参数

Tab. 1 Material parameters

材料参数	T300/976	G1195
弹性模量 Y_1/GPa	150	63
弹性模量 Y_2/GPa	9	63
剪切模量 G_{12}/GPa	7.1	24.2
剪切模量 G_{23}/GPa	2.5	24.2
剪切模量 G_{13}/GPa	7.1	24.2
泊松比 ν_{12}	0.3	0.3
泊松比 ν_{21}	0.3	0.3
压电应变系数 $d'_{31}/(\text{m/V})$	—	-2.54×10^{-10}
压电应变系数 $d'_{32}/(\text{m/V})$	—	-2.54×10^{-10}
介电系数 $\lambda_{33}/(\text{m/V})$	—	1.50×10^{-8}
密度 $\rho/(\text{kg/m}^3)$	1 600	7 600

2.1 经典问题分析

2.1.1 简支圆柱壳

如图 4 所示, 前、后两端简支圆柱壳的尺寸和材料参数为: 半径 $R = 3 \text{ m}$, 长度 $L = 6 \text{ m}$, 厚度 $h = 0.03 \text{ m}$, 弹性模量 $Y = 30 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。圆柱壳上 $(x, y, z) = (0, L/2, R)$ 和 $(x, y, z) = (0, L/2, -R)$ 处受到指向截面圆心的集中力 $F = 1 \text{ N}$ 的作用。由于模型具有对称性, 取模型的 1/8 进行计算。采用网格数量为 20×20 (径向网格数量为 20, 轴向网格数量为 20) 的 4 次非均匀有理 B 样条 (Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS) 单元进行计算, 得到 A 点在 z 方向上的线性位

移为 $-1.8526 \times 10^{-7} \text{ m}$, 与参考解 $-1.8541 \times 10^{-7} \text{ m}$ ^[41] 非常接近, 两者偏差仅 0.08%。图 5 所示为不同控制点(节点)数量下计算结果的收敛情况, 其中, p, q 为等几何分析模型的阶次, 下同。由图 5 可知, NURBS 基函数阶次的增加可以提高计算结果的收敛速度。3 次 NURBS 基函数下, 当控制点(节点)的数量大于 300 时, 本文模型计算结果的精度已经优于采用 Abaqus S8R 单元的计算结果的精度。4 次 NURBS 基函数下, 模型的计算收敛速度远高于 Abaqus S8R 单元。图 6 所示为简支圆柱壳在 z 方向上的变形情况。由图 6 可知, 本文中 4 次 NURBS 单元(网格数量为 20×20)的仿真结果与 Abaqus S8R 单元(网格数量为 24×24)的仿真结果基本一致。

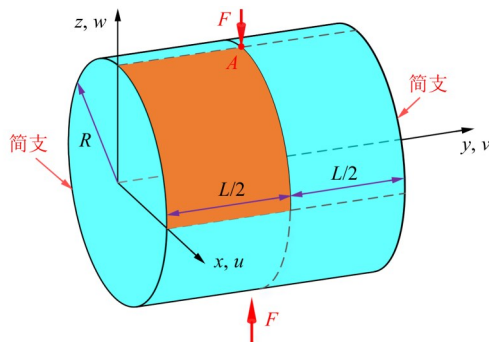


图 4 简支圆柱壳
Fig. 4 Simply supported cylindrical shell

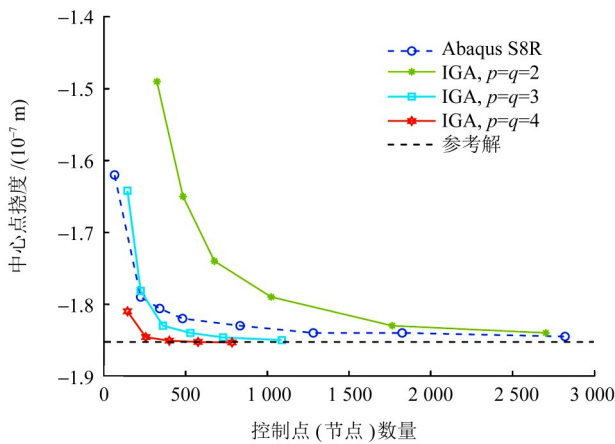
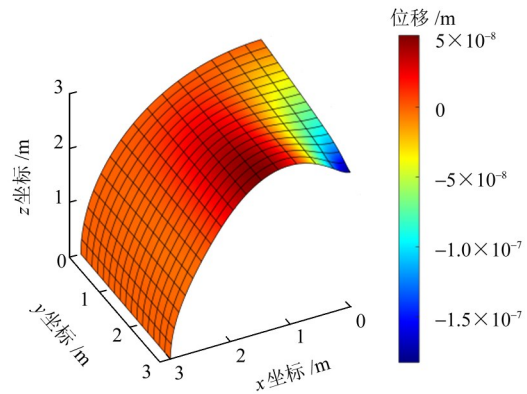


图 5 简支圆柱壳计算的收敛情况
Fig. 5 Convergence of calculations for the simply supported cylindrical shell

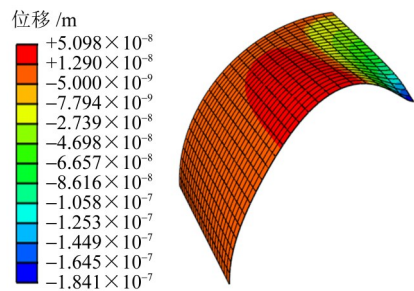
2.1.2 开口球壳

如图 7 所示, 顶部开口球壳的几何尺寸和材料参数为: 半径 $R = 10 \text{ m}$, 厚度 $h = 0.04 \text{ m}$, 角度 $\varphi = 18^\circ$, 弹性模量 $Y = 6.825 \times 10^7 \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。球壳受到两对大小相等且方向相互垂直的集中载荷 $F = 2 \text{ N}$ 的作用。根据对称性, 取球壳的 1/4 进行计算。以文献[42]的结果 0.0940 m 作为参考解, 图 8 所示为不同控制点(节点)下本文模型的计算结果。由图 8 可知, 相比于 Abaqus S8R 单元, 本文采用的 3 次和 4 次 NURBS 单

元具有更好的收敛性。图 9 所示为网格数量为 16×16 的网格下, 开口球壳 A 点处在 x 方向上的变形情况。



(a) 4 次 NURBS 单元



(b) Abaqus S8R 单元

图 6 简支圆柱壳在 z 方向上的位移云图

Fig. 6 Deformation contour plots of the simply supported cylindrical shell in the z -direction

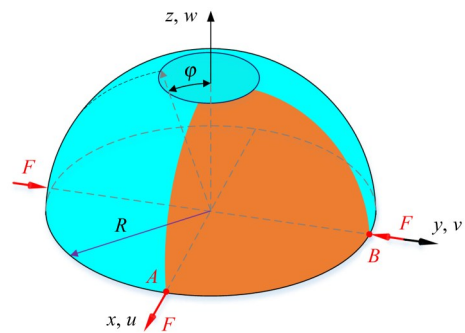


图 7 开口球壳
Fig. 7 Spherical shell with a hole

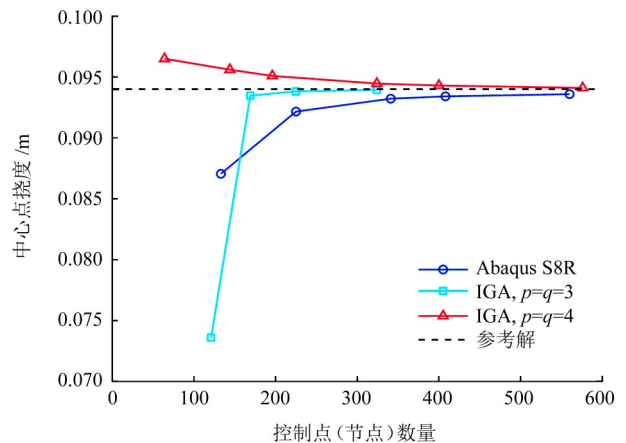


图 8 开口球壳计算的收敛情况

Fig. 8 Convergence of calculations for the open spherical shell

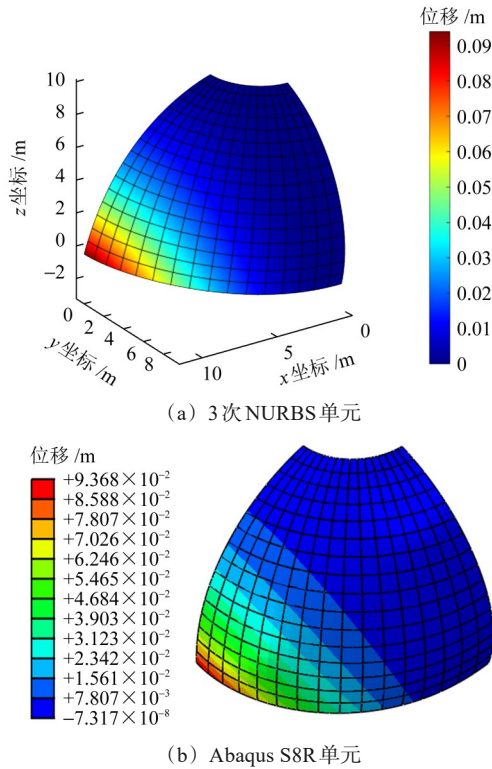


图9 开口球壳在x方向上的位移云图

Fig. 9 Displacement contour plots of the spherical shell with a hole in the x-direction

2.1.3 固支圆柱面板

如图10所示,固支圆柱面板的两直边固定,两圆弧边自由,半径 $R = 12$ in,长度 $L = 11$ in(1 in=2.54 cm),角度 $\varphi = 0.5$ rad。面板由8层正交各向异性材料构成,每层的厚度为0.005 in,总厚度为0.04 in,纤维角度为 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$,其中,下标s表示纤维角度对称分布。材料参数为:弹性模量 $Y_1 = 141$ GPa、 $Y_2 = 28.2$ GPa,剪切模量 $G_{12} = G_{13} = 17.5$ GPa、 $G_{23} = 8.75$ GPa,泊松比 $\nu = 0.313$ 。假设面板中心受到集中载荷 $F = 160$ N的作用,取模型的1/4进行计算,并以Abaqus S8R单元(网格数量为 100×100)的仿真结果 -0.2768 in作为精确解。图11所示为固支圆柱面板计算的收敛情况。图11可知,当控制点数量大于250时,本文模型的计算精度已优于Abaqus S8R单元的计算精度。

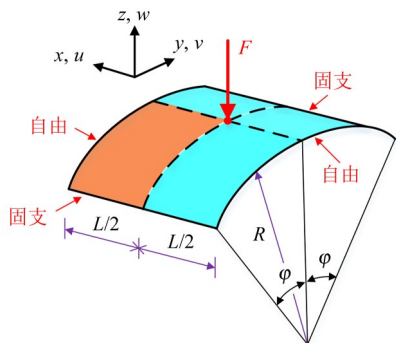


图10 固支圆柱面板

Fig. 10 Clamped cylindrical panel

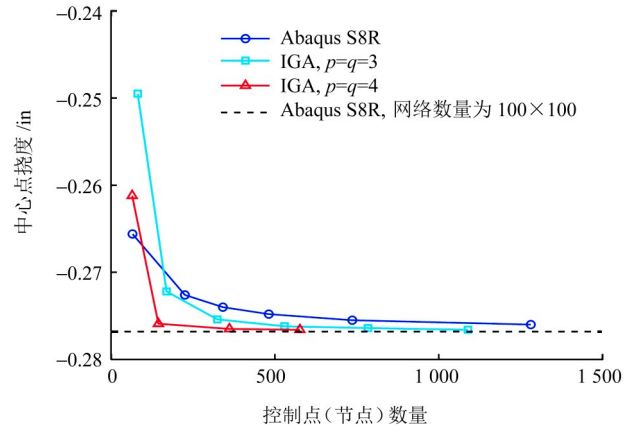


图11 固支圆柱面板计算的收敛情况

Fig. 11 Convergence of calculations for the clamped cylindrical panel

2.2 压电层合壳结构分析

2.2.1 悬臂压电层合曲壳

如图12所示,悬臂曲壳中性面处的半径为 R ,长度 a 和弧长 b 均为254 mm。主体结构(中间层)由6层厚度为0.138 mm的T300/976构成,主体结构上、下表面覆盖有2层极化方向相反、厚度为0.254 mm的G1195型压电陶瓷。结构的纤维角度为 $[P/30^\circ/30^\circ/0^\circ]$,其中,P代表压电层。采用3次NURBS单元(网格数量为 16×16)进行计算,图13所示为上、下压电层在100 V电压的作用下,半径 R 的值对壳体中心线末端2位置处的弯曲挠度 w_2/b (无量纲)和末端的扭转量 $(w_3 - w_1)/b$ (无量纲)的影响。由图13可知,半径 R 对结构挠度的影响较大,但对扭转变形的影响较小。此外,本文建立的等几何模型的分析结果与KIOUA等^{[21]476-484}的Ritz法的分析结果、LEE等^{[43]355-362}的有限元法的分析结果非常接近。

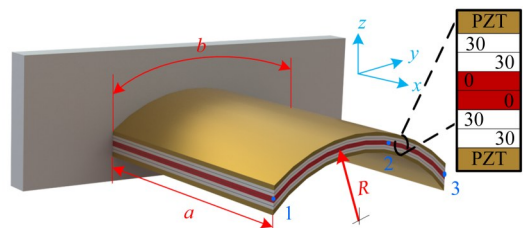


图12 悬臂曲壳

Fig. 12 Cantilevered curved shell

2.2.2 悬臂半圆柱压电层合壳

1)算例1:电压作用下壳体的静态响应

如图14所示,半圆柱压电层合壳体的尺寸为:半径 $R = 100$ mm,宽度 $W=62.8$ mm。主体结构由2层厚度为0.12 mm的T300/976型材料组成,压电层的厚度为0.24 mm。结构的纤维角度为 $[P/45^\circ/-45^\circ/P]$ (由内到外)。图15所示为在160 V输入电压作用下上、下压

电层的线性径向位移 w_r/b (无量纲)、切向位移 w_t/b (无量纲)与文献[28]²³⁹⁻²⁴⁹的对比。由图 15 可知,两者吻合较好。

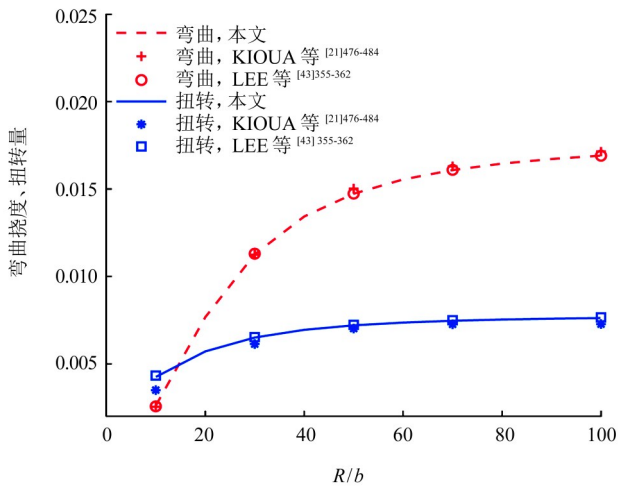


图 13 电压驱动下悬臂壳体末端的弯曲和扭转

Fig. 13 Bending and torsion at the tip of a cantilever shell under voltage actuation

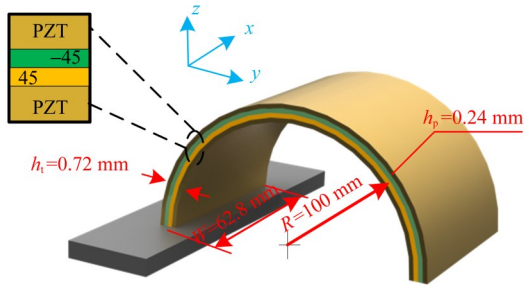


图 14 半圆柱压电层合壳(算例 1)

Fig. 14 Semi-cylindrical piezoelectric laminated shell(example 1)

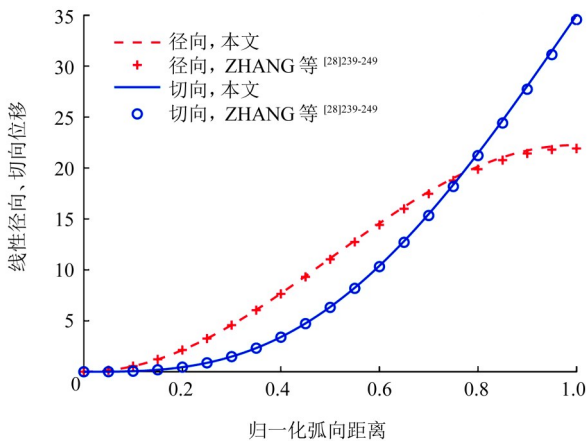


图 15 电压作用下壳体的静态响应

Fig. 15 Static response of the shell under voltage

2)算例 2:机械载荷下壳体的静态响应和受迫振动

如图 16 所示,半圆柱压电层合壳体中性面处的半径为 318.31 mm,宽度为 50.8 mm,主体结构(中间层)的材料为各向同性材料,厚度 $h_c=5.842$ mm,压电层厚度 $h_p=0.254$ mm,材料参数如表 2 所示。假设结

构末端中心处受到载荷的作用,图 17 所示为当载荷由 0 N 增至 200 N 的过程中壳体中心线末端的静态响应。图 18 所示为壳体在阶跃载荷 $F=50$ N 作用下的受迫振动响应。本算例中,用于动力学计算的时间步长为 1 ms。

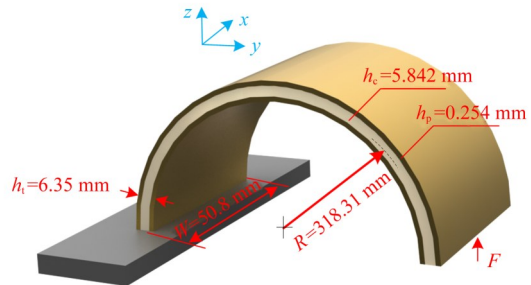


图 16 半圆柱压电层合壳(算例 2)

Fig. 16 Semi-cylindrical piezoelectric laminated shell(example 2)

表 2 半圆柱压电层合壳材料参数

Tab. 2 Material parameters of semi-cylindrical piezoelectric laminated shell

材料参数	主体结构	压电陶瓷
弹性模量/GPa	68.95	63
泊松比	0.3	0.3
压电应变系数 $d_{31}/(m/V)$	—	-1.79×10^{-10}
压电应变系数 $d_{32}/(m/V)$	—	-1.79×10^{-10}
介电系数 $\lambda_{33}/(m/V)$	—	1.65×10^{-10}
密度/(kg/m^3)	7 750	7 750

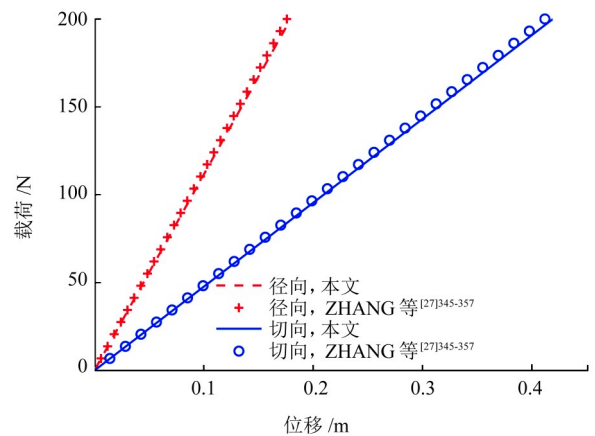


图 17 壳体中心线末端的静态响应(算例 2)

Fig. 17 Static response at the end of the shell midline(example 2)

3)算例 3:机械载荷下壳体的静态响应和自由振动

在不改变结构尺寸的基础上,将图 16 所示的悬臂半圆柱压电层合壳体的主体结构材料改为 4 层等厚度的 T300/976 型材料,结构的纤维角度为 $[P/45^\circ/-45^\circ]$ 。图 19 所示为载荷从 0 N 增至 200 N 的过程中结构的位移变化。假设壳体在初始时受到 40 N 大小的载荷的作用,产生初始位移,图 20 所示为卸载后由初始位移引起的结构的自由振动响应。本算例中,用

于动力学计算的时间步长为0.05 ms。

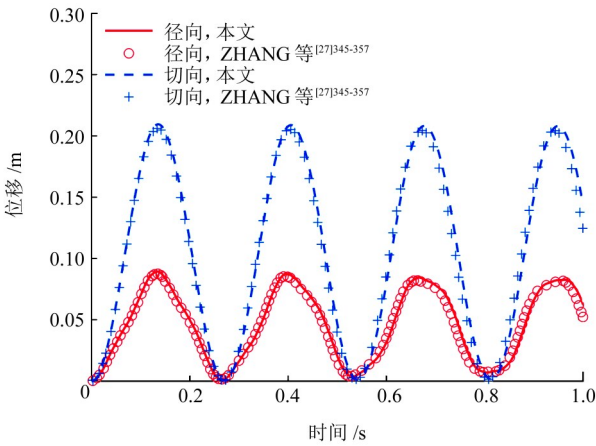


图 18 阶跃载荷作用下壳体中心线末端的受迫振动响应

Fig. 18 Forced vibration response at the end of the shell midline under a step load

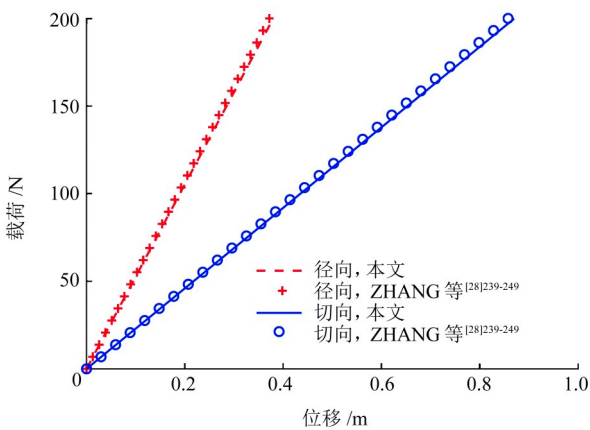


图 19 壳体中心线末端的静态响应(算例3)

Fig. 19 Static response at the end of the shell midline (example 3)

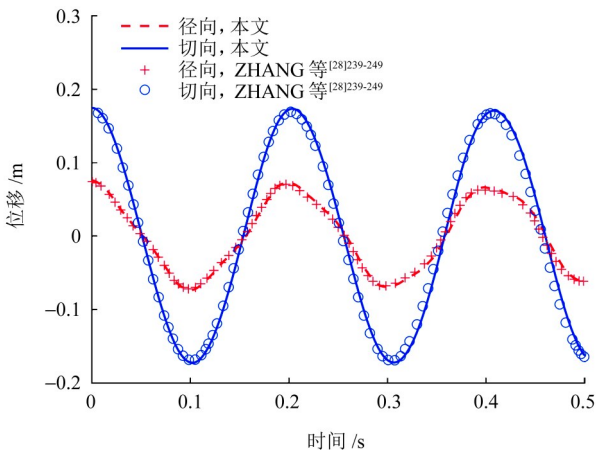


图 20 由初始位移引起的壳体自由振动响应

Fig. 20 Free vibration response of the shell induced by initial displacement

由上面3个悬臂半圆柱压电层合壳体算例的分析结果可知,本文建立的等几何分析模型的计算结果较为准确,与文献[27]³⁴⁵⁻³⁵⁷、[28]²³⁹⁻²⁴⁹的有限元分析结果非常吻合。

2.2.3 两边简支的半圆柱压电层合壳

如图21所示,压电层合壳体的半径 $R = 100\text{ mm}$,宽度 $W = 60\text{ mm}$ 。壳体的两直边的边界条件为简支,另外两圆弧边自由,主体结构由6层厚度为 0.12 mm 的T300/976材料构成,压电层的厚度为 0.24 mm ,结构的纤维角度为 $[P/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$ 。假设沿壳体的宽度线受到垂直向下均布线载荷 q_L 的作用。图22所示为线载荷 $q_L = -2\text{ N/mm}$ 作用下壳体的位移,图23所示为线载荷作用下壳体沿 z 方向的位移。由图22、图23可知,本文中3次NURBS单元(网格数量为 4×26)的分析结果与Abaqus软件中S8R单元(网格数量为 8×20)的计算结果非常接近。

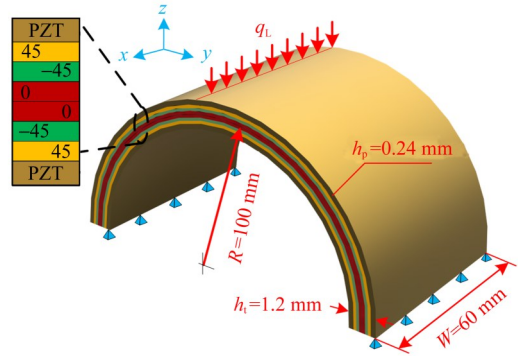


图 21 两边简支的半圆柱压电层合壳

Fig. 21 Semi-cylindrical piezoelectric laminated shell with simply supported edges on both sides

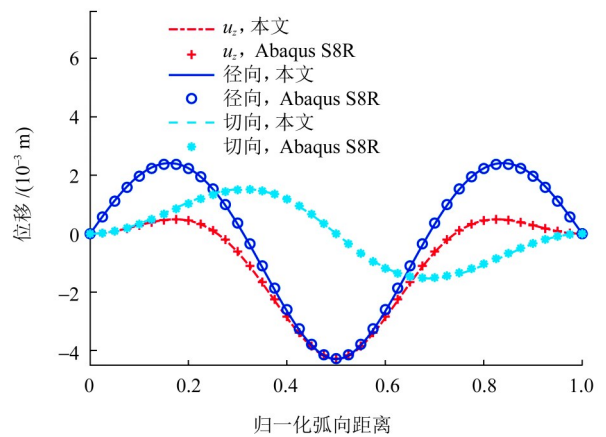
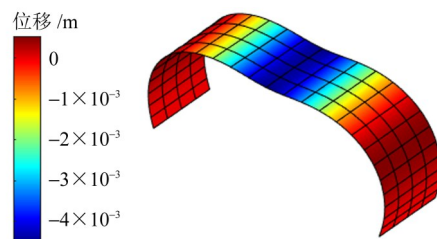


图 22 线载荷作用下壳体的位移

Fig. 22 Displacement of the shell under a linear load



(a) 3次NURBS单元

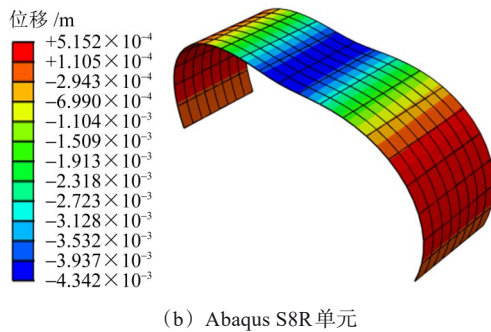


图 23 线载荷作用下壳体在 z 方向上的位移云图

Fig. 23 Displacement contour plots of the shell in the z -direction under a linear load

3 结论

相较于传统有限元法,等几何分析方法具有几何精确、精度高、高阶连续、无需传统网格的划分过程等优点,非常适用于分析含有曲线或曲面的壳结构。本文基于等几何分析方法,采用一阶剪切变形理论和哈密顿变分原理建立了压电层合壳结构的等几何分析模型。通过对经典问题的计算分析,验证了本文模型的有效性和精确性,并进一步分析了不同载荷下压电层合壳体结构的静态响应和动态响应问题。得出以下主要结论:

1) NURBS 基函数阶次的增加可以提高计算结果的收敛速度。

2) 相比 Abaqus 软件 S8R 单元的计算结果,等几何分析模型的计算结果的收敛速度更快、精度更高。

虽然本文采用等几何分析方法实现了压电层合壳结构的建模与分析,但在形函数上仅采用了传统的 NURBS 基函数。NURBS 基函数采用张量积的形式,使其无法局部细化网格,在很大程度上限制了等几何分析方法在实际工业领域中的应用。因此,近年来,在等几何分析方法中,具有局部细化功能的 T 样条函数^[44]、分层 T 网格多项式样条函数^[45]、层次 B 样条函数^[46]相继被提出,这也是后续研究的一个重要方向。

参考文献 (References)

- [1] ZHANG S Q. Nonlinear FE Simulation and active vibration control of piezoelectric laminated thin-walled smart structures[D]. RWTH Aachen University, 2014: 1-2.
- [2] QING X P, BEARD S J, IKEGAMI R, et al. Aerospace Applications of SMART Layer Technology[M]// BOLLER C, CHANG F K, FUJINO Y. Encyclopedia of Structural Health Monitoring. Chichester: John Wiley & Sons, 2009: 1881-1896.
- [3] MALKIN M, QING X P, LEONARD M, et al. Flight demonstration: health monitoring for bonded structural repairs[C]// Proceedings of the 3rd European Workshop - Structural Health Monitoring. Lancaster: DEStech Publications, INC., 2006: 167-175.
- [4] 王晓明, 周文雅, 吴志刚. 压电纤维复合材料驱动的机翼动态形状控制[J]. 航空学报, 2017, 38(1): 220313.
WANG Xiaoming, ZHOU Wenya, WU Zhigang. Dynamic shape control of wings using piezoelectric fiber composite materials[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2017, 38(1): 220313. (In Chinese)
- [5] HE X Q, NG T Y, SIVASHANKER S, et al. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(9): 1641-1655.
- [6] WANG S Y, QUEK S T, ANG K K. Vibration control of smart piezoelectric composite plates[J]. Smart Materials and Structures, 2001, 10(4): 637-644.
- [7] LIEW K M, HE X Q, NG T Y, et al. Active control of FGM plates subjected to a temperature gradient: modelling via finite element method based on FSDT [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 52(11): 1253-1271.
- [8] LIEW K M, SIVASHANKER S, HE X Q, et al. The modelling and design of smart structures using functionally graded materials and piezoelectrical sensor/actuator patches [J]. Smart Materials and Structures, 2003, 12(4): 647-655.
- [9] BEHJAT B, SALEHI M, ARMIN A, et al. Static and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric plates under mechanical and electrical loading [J]. Scientia Iranica, 2011, 18(4): 986-994.
- [10] KUMAR P, HARSHA S P. Vibration response analysis of exponential functionally graded piezoelectric (EFGP) plate subjected to thermo-electro-mechanical load [J]. Composite Structures, 2021, 267: 113901.
- [11] VARELIS D, SARAVANOS D A. Mechanics and finite element for the nonlinear response of active laminated piezoelectric composite plates[J]. AIAA Journal, 2004, 42(6): 1227-1235.
- [12] PANDA S, RAY M C. Nonlinear finite element analysis of functionally graded plates integrated with patches of piezoelectric fiber reinforced composite [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2008, 44(8): 493-504.
- [13] PHUNG-VAN P, NGUYEN-THOI T, LE-DINH T, et al. Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) [J]. Smart Materials and Structures, 2013, 22(9): 095026.
- [14] NGUYEN-QUANG K, DANG-TRUNG H, HO-HUU V, et al. Analysis and control of FGM plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) [J]. Composite Structures, 2017, 165: 115-129.
- [15] JADHAV P A, BAJORIA K M. Buckling of piezoelectric functionally graded plate subjected to electro-mechanical loading [J]. Smart Materials and Structures, 2012, 21(10): 105005.
- [16] JADHAV P A, BAJORIA K M. Free and forced vibration control

- of piezoelectric FGM plate subjected to electro-mechanical loading [J]. *Smart Materials and Structures*, 2013, 22(6):065021.
- [17] FAKHARI V, OHADI A, YOUSEFIAN P. Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment [J]. *Composite Structures*, 2011, 93(9):2310-2321.
- [18] FAKHARI V, OHADI A. Nonlinear vibration control of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2011, 17(3):449-469.
- [19] SHEGOKAR N L, LAL A. Stochastic nonlinear bending response of piezoelectric functionally graded beam subjected to thermoelectromechanical loadings with random material properties [J]. *Composite Structures*, 2013, 100:17-33.
- [20] LAL A, SHEGOKAR N L, SINGH B N. Finite element based nonlinear dynamic response of elastically supported piezoelectric functionally graded beam subjected to moving load in thermal environment with random system properties [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 44:274-295.
- [21] KIOUA H, MIRZA S. Piezoelectric induced bending and twisting of laminated composite shallow shells [J]. *Smart Materials and Structures*, 2000, 9(4):476-484.
- [22] CAO Y, GUO Z W, QU Y L. Mechanically induced electric potential and charge redistribution in laminated composite piezoelectric semiconductor circular cylindrical thin shells [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 195:111372.
- [23] MARINKOVIC D, ZEHN M. Finite element formulation for active composite laminates [J]. *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2015, 8(3):328-335.
- [24] BALAMURUGAN V, NARAYANAN S. A piezolaminated composite degenerated shell finite element for active control of structures with distributed piezosensors and actuators [J]. *Smart Materials and Structures*, 2008, 17(3):035031.
- [25] BALAMURUGAN V, NARAYANAN S. Multilayer higher order piezolaminated smart composite shell finite element and its application to active vibration control [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, 20(4):425-441.
- [26] JIN Q L. A new electro-mechanical finite formulation for functionally graded graphene reinforced composite laminated thick plates with piezoelectric actuator [J]. *Thin-Walled Structures*, 2022, 176:109190.
- [27] ZHANG S Q, SCHMIDT R. Static and dynamic FE analysis of piezoelectric integrated thin-walled composite structures with large rotations [J]. *Composite Structures*, 2014, 112:345-357.
- [28] ZHANG S Q, LI Y X, SCHMIDT R. Active shape and vibration control for piezoelectric bonded composite structures using various geometric nonlinearities [J]. *Composite Structures*, 2015, 122:239-249.
- [29] 薛婷, 秦现生, 张顺琦, 等. CNT 梯度增强纤维压电复合板壳几何非线性建模与分析 [J]. *机械工程学报*, 2020, 56(16):44-53. XUE Ting, QIN Xiansheng, ZHANG Shunqi, et al. Geometrically nonlinear modeling and analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite rectangular plate shells with MFCs [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(16):44-53. (In Chinese)
- [30] ZHANG S Q, GAO Y S, ZHAO G Z, et al. Geometrically nonlinear analysis of CNT-reinforced functionally graded composite plates integrated with piezoelectric layers [J]. *Composite Structures*, 2020, 234:111694.
- [31] WANG C, YU T T, SHAO G J, et al. Shape optimization of structures with cutouts by an efficient approach based on XIGA and chaotic particle swarm optimization [J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2019, 74:176-187.
- [32] LEI J, YUN L L, BUI T Q. Numerical simulation of crack growth in piezoelectric structures by BEM [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, 85:30-42.
- [33] JIANG W W, GAO X W, XU B B, et al. Static and forced vibration analysis of layered piezoelectric functionally graded structures based on element differential method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2023, 437:127548.
- [34] 许欢, 杨国来, 郑建国, 等. 齿轮无摩擦接触的等几何分析研究 [J]. *机械传动*, 2015, 39(5):30-32. XU Huan, YANG Guolai, ZHENG Jianguo, et al. Research of the isogeometric analysis of gear frictionless contact [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2015, 39(5):30-32. (In Chinese)
- [35] NGUYEN-QUANG K, VO-DUY T, DANG-TRUNG H, et al. An isogeometric approach for dynamic response of laminated FG-CNT reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 332:25-46.
- [36] NGUYEN L B, NGUYEN N V, THAI C H, et al. An isogeometric Bézier finite element analysis for piezoelectric FG porous plates reinforced by graphene platelets [J]. *Composite Structures*, 2019, 214:227-245.
- [37] NGUYEN N V, NGUYEN L B, NGUYEN-XUAN H, et al. Analysis and active control of geometrically nonlinear responses of smart FG porous plates with graphene nanoplatelets reinforcement based on Bézier extraction of NURBS [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 180:105692.
- [38] LIU T, LI C D, WANG C, et al. Geometrically nonlinear isogeometric analysis of smart piezoelectric FG plates considering thermal effects of piezoelectric stress and dielectric constants [J]. *Composite Structures*, 2021, 266:113795.
- [39] LIU T, LIU Q Y, ZHAO Y F, et al. Bi-nonlinear isogeometric analysis of graphene platelets reinforced functionally graded porous plates bonded with piezoelectrics [J]. *Composite Structures*, 2023, 306:116569.
- [40] 张欣宇, 肖玉善, 吴振, 等. 压电智能功能梯度夹芯结构高精度理论模型与主动控制 [J]. *力学学报*, 2024, 56(1):130-140. ZHANG Xinyu, XIAO Yushan, WU Zhen, et al. High precision model and active control for piezoelectric intelligent functionally gradient sandwich structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(1):130-140. (In Chinese)
- [41] REDDY J N. *Mechanics of laminated composite plates and shells*

- theory and analysis[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2003: 1-856.
- [42] MACNEAL R H, HARDER R L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1985, 1(1): 3-20.
- [43] LEE S, GOO N S, PARK H C, et al. A nine-node assumed strain shell element for analysis of a coupled electro-mechanical system [J]. *Smart Materials and Structures*, 2003, 12(3): 355-362.
- [44] CHOULIARAS S P, KAKLIS P D, KOSTAS K V, et al. An Isogeometric Boundary Element Method for 3D lifting flows using T-splines [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 373: 113556.
- [45] KARUTHEATH P L, GUPTA A, MAMINDLAPELLY B, et al. A continuous field adaptive mesh refinement algorithm for isogeometric topology optimization using PHT-Splines [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 412: 116075.
- [46] GAO D P, LIN H W, LI Z B. Free-form multi-level porous model design based on truncated hierarchical B-spline functions [J]. *Computer-Aided Design*, 2023, 162: 103549.

Isogeometric modeling and analysis of piezoelectric laminated shells

LIU Tao¹ XU Wenxiang¹ JIANG Yafen² HU Xiaolei¹ ZHANG Shunqi³

(1. School of Mechanical Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243032, China)

[2. College of Innovation and Entrepreneurship (College of Engineers), Engineering Training Center, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243032, China]

(3. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: [Objective] The traditional finite element method suffers from geometric inaccuracy and low element order during modeling, which introduces approximation errors when dealing with complex geometric models with curves or curved surfaces. In contrast, the isogeometric analysis method employs the non-uniform rational B-splines (NURBS) basis functions as shape functions and offers advantages such as exact geometry representation, high-order continuity, high accuracy, and elimination of the traditional meshing process. Therefore, an isogeometric analysis model capable of accurately predicting the electromechanical behavior of piezoelectric laminated shell structures is to be proposed based on the isogeometric analysis method and the first-order shear deformation theory, and the corresponding analysis is to be carried out. [Methods] Firstly, the displacement discretization equations of the Reissner-Mindlin shell element were derived using NURBS basis functions. Secondly, considering the fiber orientation of the material, the transformation relation of the piezoelectric constitutive equations from the local coordinate system to the global coordinate system was established, and the isogeometric analysis model of piezoelectric laminated shells was constructed via Hamilton's variational principle. Thirdly, the established isogeometric analysis model was used to analyze classical shell problems, the results of isogeometric analysis model were compared with results in the existing literature and simulation results of finite element software, and the accuracy and efficiency of the model were verified. Finally, the static and dynamic responses of piezoelectric laminated shells under electromechanical loading were investigated. [Results] Numerical results demonstrate that the established isogeometric analysis model for piezoelectric laminated shells achieves high computational accuracy and is simultaneously applicable to the analysis of structures such as conventional single-layer shells, laminated shells, and piezoelectric laminated shells.

Key words: Isogeometric analysis; First-order shear deformation theory; Piezoelectric laminated shell; Static response; Dynamic response

Corresponding author: LIU Tao, E-mail: lt_ahut@126.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (11972020); Key Research Projects of Natural Science in Colleges and Universities of Anhui Province (KJ2021A0404, KJ2021A0368)

Received: 2024-07-13

(编辑:刘星泽)