

## 设计参数对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮啮合刚度的影响分析

奉泰宇<sup>1</sup> 赵斐<sup>1</sup> 刘昌浩<sup>1</sup> 罗岚<sup>2</sup> 陈忠敏<sup>3</sup>

(1. 西南科技大学制造科学与工程学院, 绵阳 621000)

(2. 兰州理工大学机电工程学院, 兰州 730050)

(3. 四川建安工业有限责任公司研发中心, 成都 625100)

**摘要:**【目的】针对变双曲圆弧齿线(Variable Hyperbolic Circular-Arc-Tooth-Trace, VH-CATT)圆柱齿轮啮合刚度的设计参数影响规律尚不明确的问题,揭示齿宽、模数、压力角、刀盘半径对其啮合刚度的影响规律,为该类齿轮参数优化设计与传动性能提升提供参考。【方法】首先,基于啮合刚度计算,建立齿轮力学模型,结合齿面离散节点法构建VH-CATT圆柱齿轮有限元模型,为刚度量化分析提供支撑;其次,采用Abaqus软件开展静态啮合仿真,计算齿面节点法向接触力与综合弹性变形,求解单齿及多齿啮合刚度;然后,采用控制变量法,分别改变4项核心设计参数,探究单一参数对啮合刚度的影响规律;最后,通过标准直齿轮刚度计算验证有限元模型的精度,保障研究结果的可靠性。【结果】结果表明,齿宽增至45 mm后啮合刚度趋于平稳,压力角超23°时刚度稳定在固定范围;模数增大使啮合刚度逐渐减小至稳定,刀盘半径增大则啮合刚度持续提升;压力角为15°时,齿轮重合度达2.34,存在3齿啮合区,啮合刚度显著高于其他工况,各参数影响规律可为齿轮参数选取提供量化依据。

**关键词:** VH-CATT圆柱齿轮; 啮合刚度; 设计参数; 有限元法; 参数影响规律

**中图分类号:** TH132.4 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2026.04.016

## 0 引言

齿轮作为基础传动元件,广泛应用于各类装备。近年来,变双曲圆弧齿线(Variable Hyperbolic Circular-Arc-Tooth-Trace, VH-CATT)圆柱齿轮因其承载能力强、传动平稳、润滑性能好及无轴向力等优点,受到广泛关注。马振群等<sup>[1]</sup>从几何建模层面,分析了普通多轴联动数控机床加工对称弧形圆柱齿轮的实现方法。TSENG等<sup>[2]</sup>基于双刃旋转刀盘加工法,研究了该类齿轮的根切特性、传动误差及齿面接触椭圆分布规律。吴阳等<sup>[3]</sup>探究了机床几何误差对圆弧齿线圆柱齿轮齿面误差的映射规律。赵斐等<sup>[4]</sup><sup>[875-885]</sup>以旋转刀盘法双刃铣削圆弧齿线圆柱齿轮为研究对象,推导了含过渡齿面的全齿面数学方程,明确了齿轮切齿约束条件。马登秋等<sup>[5]</sup>研究了该类齿轮齿面动态接触应力分布与啮合位置的时变规律。罗岚等<sup>[6]</sup>计算了VH-CATT圆柱齿轮传动几何特性,建立了齿面滑动率与磨损量的量化关联模型。郭瑞<sup>[7]</sup>分析了该类齿轮的啮合行为与混合润滑特性。

现有研究主要集中于该类齿轮的加工方法、精确

建模、接触特性、磨损与润滑性能等方向,针对啮合刚度的研究相对匮乏。魏永峭等<sup>[8]</sup>、苟建平等<sup>[9]</sup>虽采用有限元法开展了该类齿轮啮合刚度的分析,但尚未系统揭示关键设计参数对啮合刚度的影响规律。针对渐开线圆柱齿轮、斜齿轮等常规类型齿轮,已有大量学者采用不同方法完成了啮合刚度的求解与特性分析<sup>[10-13]</sup>,为VH-CATT圆柱齿轮的啮合刚度计算提供了方法参考。

然而,现有研究尚缺乏关于设计参数对VH-CATT圆柱齿轮啮合刚度影响规律的系统量化分析。基于此,通过建立高精度有限元接触模型,完成齿轮静态啮合刚度的求解,系统研究齿宽、模数、压力角、刀盘半径4项关键设计参数对啮合刚度的影响规律,为该类齿轮的参数设计提供量化参考,为后续动态啮合刚度分析与动力学特性研究提供支撑。

## 1 啮合刚度和传动误差理论模型

## 1.1 VH-CATT圆柱齿轮啮合刚度模型

单个轮齿啮合刚度 $k$ 的一般计算式<sup>[14]</sup><sup>1-2</sup>为

收稿日期: 2024-06-06 修回日期: 2024-07-17

基金项目: 四川省自然科学基金青年科学基金项目(2023NSFSC0855); 四川省博士后特别项目(TB2022028); 中央引导地方科技发展项目(2023ZYDF088)

作者简介: 奉泰宇,男,2001年生,湖南宁远人,硕士研究生; 主要研究方向为齿轮传动; E-mail: 1278587412@qq.com。

赵斐(通信作者),男,1989年生,四川宣汉人,博士,讲师; 主要研究方向为齿轮传动; E-mail: Soapzhao@126.com。

引用格式: 奉泰宇,赵斐,刘昌浩,等. 设计参数对变双曲圆弧齿线圆柱齿轮啮合刚度的影响分析[J]. 机械强度, 2026, 48(4): 139-147.

FENG Taiyu, ZHAO Fei, LIU Changhao, et al. Analysis of the influence of design parameters on meshing stiffness of the cylindrical gear with VH-CATT[J]. Journal of Mechanical Strength, 2026, 48(4): 139-147.



免费获取

$$k = \frac{F_n}{u_n} \quad (1)$$

式中,  $F_n$  为齿廓曲面的法向接触力;  $u_n$  为轮齿的法向综合弹性变形。考虑到法向接触力和法向综合弹性变形具有时变性, 因此本文计算时基于有限元法, 考虑多齿啮合时的齿间载荷分配对单齿啮合刚度的影响。

轮齿法向综合弹性变形包括赫兹接触产生的局部弹性变形  $u_{H1}$ , 轮齿弯曲产生的接触位移  $u_b$ , 接触点受到轴承、轴、支撑结构等产生的变形  $u_f$ , 以及基体产生的变形位移  $u_s$  [14]2-4。为简化分析, 本文中仅考虑赫兹接触弹性变形  $u_{H1}$  和轮齿弯曲产生的接触位移  $u_b$ , 即

$$u_n = \sum_{\delta=1}^2 u_{H\delta} + \sum_{\delta=1}^2 u_{b\delta} \quad (2)$$

式中,  $\delta=1, 2$  分别对应主动轮与从动轮, 下同。

多齿接触啮合状态下, 各啮合轮齿间为并联耦合关系, 因此多齿啮合综合啮合刚度  $k_m$  可以表示为

$$k_m = \sum_{i=1}^P k_i \quad (3)$$

式中,  $P$  为同时啮合的齿轮对数。

其中截面为渐开线, 齿面曲率沿齿向连续变化。若将齿面接触区域简化为接触线, 通过接触点平均综合弹性变形完成刚度计算 [14]3-4, 会忽略接触椭圆内不同位置的变形差异, 产生较大计算误差。因此, 采用齿面离散节点法, 将整个齿面离散为网格节点 (图 1) [15], 通过计算单个节点的啮合刚度, 叠加得到全齿面静态啮合刚度。

$$k_i = \frac{F_{ni}}{u_{ni}} \quad (4)$$

$$k_1 = \sum_{i=1}^r k_i \quad (5)$$

$$k_2 = \sum_{i=1}^r k_i \quad (6)$$

式中,  $k_i$  为单个节点的啮合刚度;  $F_{ni}$  和  $u_{ni}$  分别为节点  $i$  所受的齿面法向接触力以及法向综合弹性变形;  $k_1$  和  $k_2$  分别为主动轮和从动轮的齿面啮合刚度;  $r$  为齿面离散的节点数。

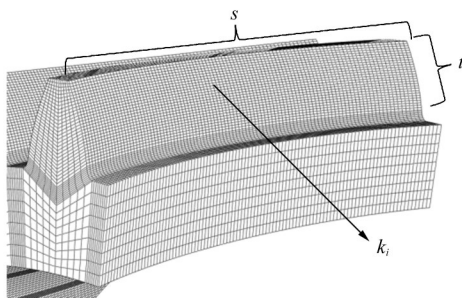


图1 VH-CATT圆柱齿轮齿面离散网格节点示意图

Fig. 1 Discrete grid node diagram of the VH-CATT cylindrical gear tooth surface

在一个啮合周期中, 若齿轮副的重合度大于1, 会存在  $n$  对齿同时啮合, 在静态啮合刚度分析中, 某一转角时刻中第  $l$  ( $1 < l < n$ ) 对齿轮副的综合啮合刚度  $k_l$  可以表示为

$$k_l = \frac{k_p k_g}{k_p + k_g} \quad (7)$$

式中,  $k_p$ 、 $k_g$  分别为主动轮单齿啮合刚度和从动轮单齿啮合刚度。

齿轮的多齿啮合刚度根据式(3)可表示为

$$K = \sum_{l=1}^n k_l \quad (8)$$

## 1.2 VH-CATT圆柱齿轮传递误差模型

根据传递误差的定义, 由于齿轮加工精度、装配误差以及工作条件等因素引起的齿轮实际啮合位置与理论啮合位置之间的差异, 可得到传递误差的计算式 [14]5-6 为

$$\beta = \varphi_2 - \varphi_1 \frac{z_1}{z_2} \quad (9)$$

式中,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  分别为主动轮和从动轮从初始位置转过的角度;  $z_1$  和  $z_2$  分别为主动轮和从动轮的齿数。

## 2 VH-CATT圆柱齿轮的有限元分析模型

### 2.1 VH-CATT圆柱齿轮有限元模型的建立

通过理论计算式 [4]875-885 生成的齿面点云导入三维建模软件中生成并装配成齿轮副, 齿轮副的设计参数如表 1 所示。将模型导入 Abaqus 软件后完成网格划分, 针对齿轮接触分析模型, 选用 C3D8R 六面体缩减积分单元, 该单元对位移求解精度高、收敛性好, 可保障数据提取的准确性。为兼顾计算效率与求解精度, 采用 7 齿啮合简化模型, 划分网格之后的有限元模型如图 2 所示。

表1 VH-CATT圆柱齿轮基本参数

Tab. 1 Basic parameters of the VH-CATT cylindrical gear

参数	主动轮	从动轮
齿数 $z$	40	60
模数 $m/\text{mm}$	3	3
压力角 $\alpha/(\circ)$	20	20
刀盘半径 $R_f/\text{mm}$	80	80
齿宽 $B/\text{mm}$	45	45

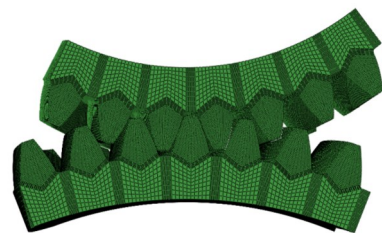


图2 VH-CATT圆柱齿轮7齿啮合有限元网格模型

Fig. 2 Finite element mesh model of the VH-CATT cylindrical gear with seven-tooth meshing

## 2.2 有限元分析模型前处理

有限元分析模型前处理设置的正确与否将直接决定最终的分析结果,因此有限元分析前处理十分关键。

1)材料属性定义:主动轮和从动轮的弹性模量  $E$  设置为 210 GPa,泊松比  $\nu$  设置为 0.3。

2)单元属性类型定义:采用六面体 1 次缩减积分单元 (C3D8R),为保障齿面法向接触力与综合弹性变形的提取精度,对工作齿面进行网格加密;经网格无关性验证,最终确定齿面网格尺寸为 0.05 mm。

3)分析类型定义:采用隐式静力学分析,计算步长为 0.01。

4)相互作用定义:将主动轮与从动轮的工作齿面设置为接触对,摩擦因数取 0.15;在主动轮与从动轮的旋转中心分别设置参考点,将两轮内圈表面耦合至对应参考点,后续边界条件与载荷均施加于参考点。

5)分析步设置:为使整个啮合过程收敛,将整个过程分为 4 步:① 消除齿侧间隙,对从动轮施加 1 个绕自身轴线旋转的微小转动量,大轮施加固定约束,使得计算中不存在刚体位移,保证初始的迭代运算收敛;② 去除从动轮绕自身轴线旋转的自由度,添加绕自身轴线的自由度上的微小转矩,达到初始的受载接触状态;③ 将施加的微小转矩增大至模拟工况下的转矩,保证载荷逐步增大,便于计算收敛;④ 对主动轮绕自身轴线的转动自由度施加固定转角边界条件,使主动轮带动从动轮完成完整啮合过程的求解。

6)载荷定义:对从动轮施加负载转矩为 300 N·m。

## 3 有限元计算结果分析

前处理完成后提交计算,以中间第 1 对齿轮副(图 2)作为起始,沿主动轮转动方向,选定第 2 对啮合齿轮副作为分析对象,将单对齿轮的啮合过程分为 50 个位置,每个位置主动轮转动  $0.006^\circ$ 。输出齿面的法向接触力和齿面法向综合弹性变形,根据式(4)、式(5)和式(6)分别计算主动轮和从动轮的单齿啮合刚度,根据式(7)计算单对齿轮副的综合啮合刚度。

### 3.1 有限元模型精度验证

采用文中方法计算标准直齿圆柱齿轮的时变啮合刚度,与文献经典回归公式计算结果<sup>[16]1-9</sup>对比,计算得到的刚度曲线对比如图 3 所示。

由图 3 可知,文中采用的 VH-CATT 圆柱齿轮时变啮合刚度计算方法,所得结果与文献<sup>[16]1-9</sup>的刚度曲线变化趋势完全一致,仅因计算方法差异存在微量偏差,表明该方法精度满足要求,可用于 VH-CATT 圆柱齿轮啮合刚度特性分析。

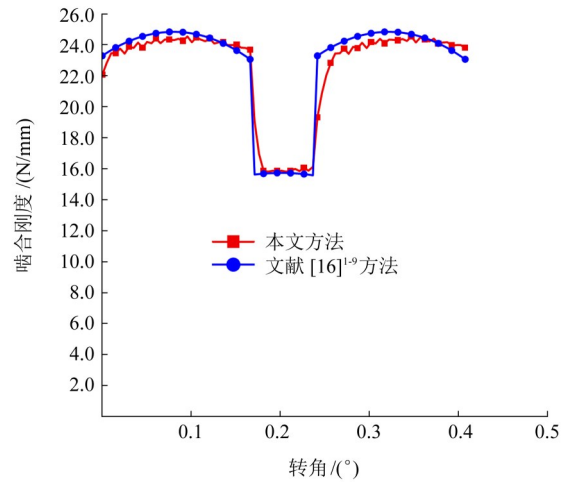


图 3 直齿轮时变啮合刚度计算结果与文献<sup>[16]1-9</sup>方法对比曲线  
Fig. 3 Comparison of the time-varying meshing stiffness of the spur gear between calculation and literature <sup>[16]1-9</sup> method

### 3.2 接触力及综合弹性变形分析

如图 4 所示,根据式(10)、式(11),通过坐标系  $O_1-x_1y_1z_1$ 、 $O_2-x_2y_2z_2$  对各节点未变形坐标进行坐标变换<sup>[17]</sup>,得到转动后理想坐标,而后提取各节点转动后的实际坐标,将上述得到的点坐标变换到以齿轮副啮合法向方向为  $x$  轴的坐标系  $O_2-x_3y_3z_3$  中,计算法向弹性综合变形量  $\Delta u_n$ ,即

$$(x_1, y_1, z_1) = M_3 M_1 (x_0, y_0, z_0) \quad (10)$$

$$(x'_2, y'_2, z'_2) = M_2 (x_2, y_2, z_2) \quad (11)$$

$$\Delta u_n = |x'_2 - x_1| \quad (12)$$

式中,  $(x_1, y_1, z_1)$  为坐标变换后理想节点法向坐标;  $(x_0, y_0, z_0)$  为未变形前节点坐标;  $(x_2, y_2, z_2)$  为变形后的实际节点坐标;  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  为变形后的实际节点法向坐标;  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  为坐标变换矩阵。

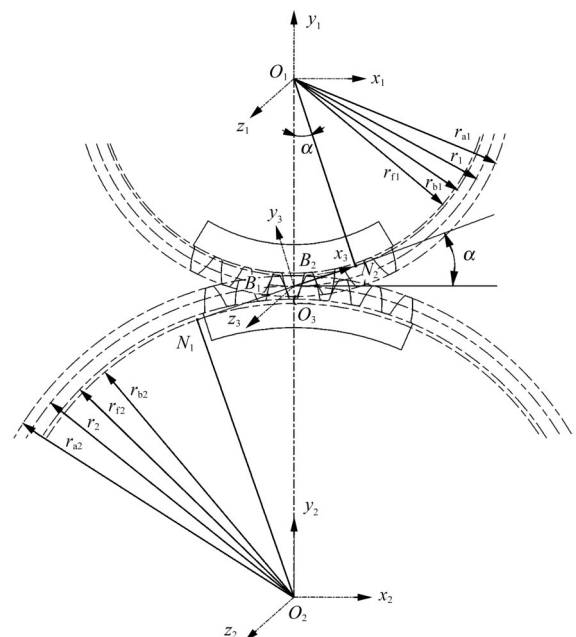
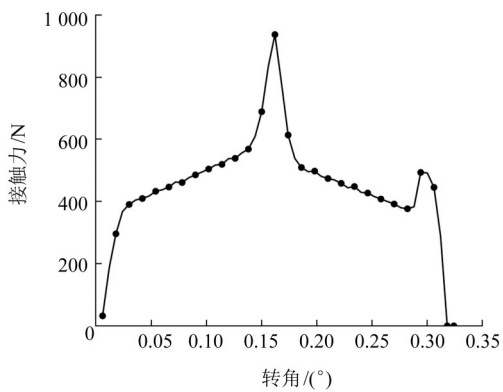
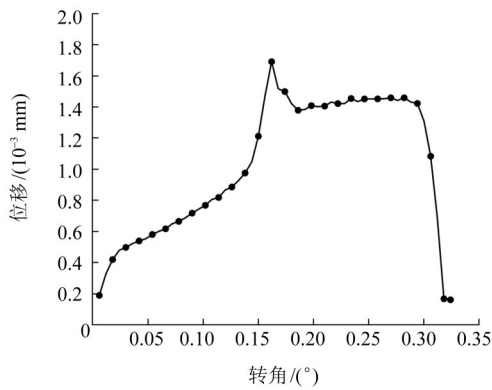


图 4 齿面法向综合弹性变形理论计算模型  
Fig. 4 Theoretical calculation model of the tooth surface normal comprehensive elastic deformation

以第2对啮合齿的主动轮为分析对象,以进入啮合时为起始角度( $0^\circ$ ),通过场输出获得啮合过程中齿面法向接触力与综合弹性变形,如图5所示。由图5(a)可知,当转角处于 $0.15^\circ \sim 0.16^\circ$ 时,齿轮处于单齿啮合区间,此时仅有1对齿轮参与啮合,齿面接触力明显大于其他位置。由图5(b)可知,随齿轮转角增大,齿面综合变形量先增大后减小最后趋于平稳;进入单齿啮合区间前,随转角增大,接触点弹性变形量持续增大;退出单齿啮合区间后,接触点弹性变形量逐渐减小,但轮齿弯曲变形量持续增大,综合变形量为两者耦合结果,整体保持不变。



(a) 主动轮接触力



(b) 主动轮变形量

图5 主动轮齿面法向接触力与法向变形量变化

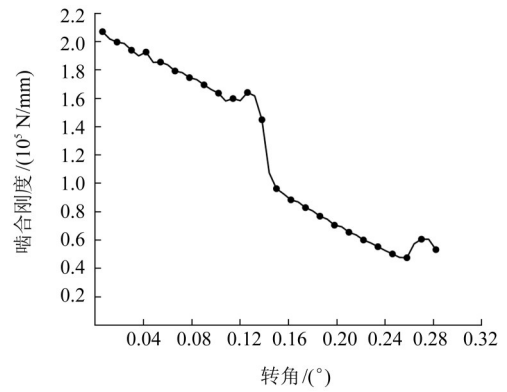
Fig. 5 Variations of normal contact force and normal deformation on driving gear tooth surface

### 3.3 单齿啮合刚度的计算

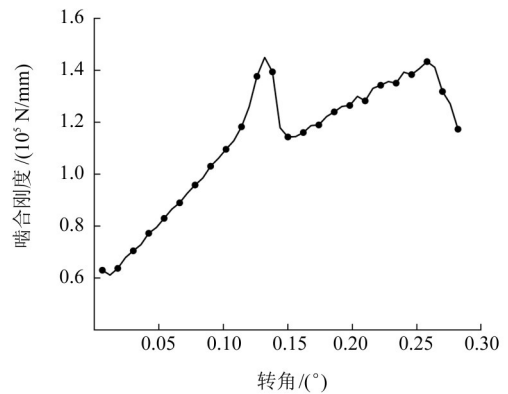
将齿面接触力与弹性变形代入式(1),得到主动轮与从动轮的单齿啮合刚度,结果如图6所示。

由图6可知,主动轮与从动轮单齿啮合刚度在单双齿交替位置出现波动;主动轮转过单齿啮合区间后,刚度随转角增大逐渐减小,从动轮刚度变化趋势与之相反。

将计算所得主、从动轮的啮合刚度代入式(7)中可得单齿轮副的啮合刚度,计算结果如图7和表2所示。



(a) 主动轮啮合刚度



(b) 从动轮啮合刚度

图6 考虑载荷分配的主、从动轮单齿啮合刚度

Fig. 6 Single-tooth meshing stiffness of driving/driven gears considering load distribution

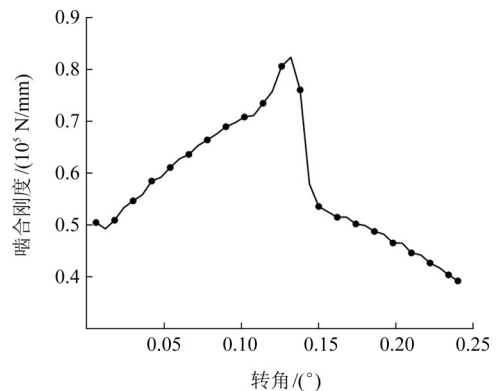


图7 考虑载荷分配的单齿轮副综合啮合刚度

Fig. 7 Comprehensive meshing stiffness of the single tooth pair considering load distribution

由图7可知,单齿轮副啮合刚度曲线随着转角增大,整体呈现“先增后降”的拱形趋势,单双齿交替位置存在过渡变化,该现象源于仿真齿轮副重合度为1.96,单齿啮合区间较窄,单齿-双齿交替啮合过渡过程快造成的。

### 3.4 齿轮副重合度计算

多齿啮合刚度需通过单齿啮合刚度曲线周期性平移叠加获得,平移量由齿轮副重合度确定<sup>[14]3-4</sup>。通过Abaqus软件仿真历程输出获取齿面接触应力图像,

在弹性范围内记录接触应力开始出现与消失的时间  $\Delta T$ , 测量相邻两齿开始啮合的时间差  $\Delta t$ , 重合度表达式为

$$\varepsilon = \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (13)$$

表 2 VH-CATT 圆柱齿轮副不同啮合位置综合啮合刚度  
Tab. 2 Comprehensive meshing stiffness of the VH-CATT cylindrical gear pair at different meshing positions

啮合位置序号	啮合刚度/(N/mm)	啮合位置序号	啮合刚度/(N/mm)
1	50 464.7	21	80 584.2
3	50 906.4	23	76 030.1
5	54 637.5	25	53 549.3
7	58 462.6	27	51 482.9
9	61 064.5	29	50 178.3
11	63 579.9	31	48 738.2
13	66 378.0	33	46 523.2
15	68 932.3	35	44 605.7
17	70 793.3	37	42 649.4
19	73 439.0	39	40 371.7

通过有限元仿真分别测得  $\Delta T$ 、 $\Delta t$  代入式(13)中, 可以求得重合度为  $\varepsilon=1.96$ 。

### 3.5 多齿啮合刚度

#### 3.5.1 多齿啮合刚度计算

将单齿副啮合刚度曲线向左、向右平移角度  $n\Delta\alpha$ , 再将平移曲线根据式(8)进行叠加, 即可得到多齿啮合刚度, 如图 8 所示。

$$\Delta\alpha = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (14)$$

式中,  $\delta$  为整个啮合过程主动轮的转角。

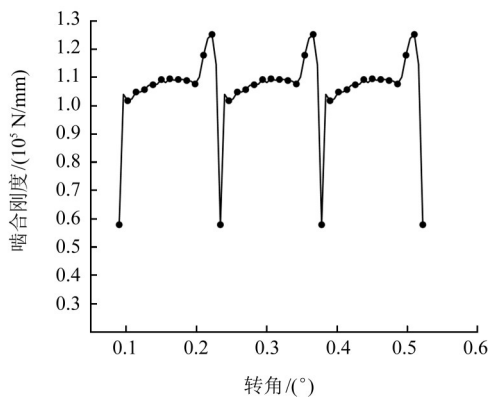


图 8 VH-CATT 圆柱齿轮多齿啮合刚度

Fig. 8 Multi-tooth meshing stiffness of the VH-CATT cylindrical gear

#### 3.5.2 不同载荷对啮合刚度的影响

为探究不同载荷对齿轮副啮合刚度的影响规律, 保持齿轮设计参数不变, 对从动轮分别施加 100、300、800 N·m, 载荷结果如图 9 所示。

由图 9 可知, 齿轮副啮合刚度随转矩增大而提升,

单齿与双齿啮合刚度的相对差值增大, 齿轮副单齿-双齿交替啮合的平稳性下降。

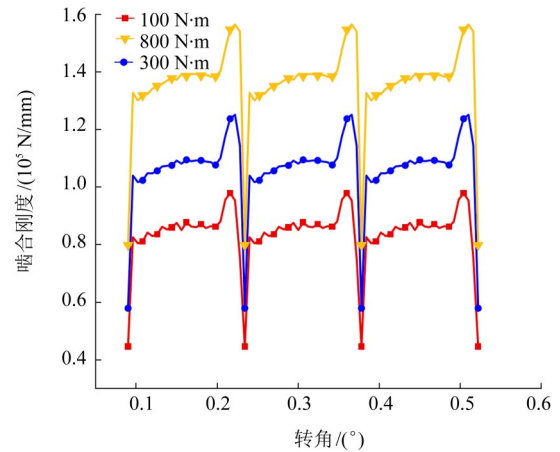


图 9 不同转矩对齿轮多齿啮合刚度的影响

Fig. 9 Effect of different torques on gear multi-tooth meshing stiffness

### 3.6 齿轮副传递误差

#### 3.6.1 齿轮副传递误差的计算

由式(9)计算得到传递误差值, 如图 10 所示。

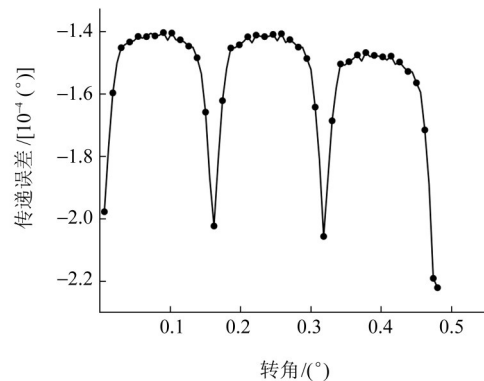


图 10 VH-CATT 圆柱齿轮副传递误差

Fig. 10 Transmission error of the VH-CATT cylindrical gear pair

对比图 9、图 10 可知, 齿轮副啮合刚度直接决定其传递误差特性。单齿啮合区的啮合刚度低于多齿啮合区, 对应传递误差显著大于多齿啮合区间, 表明多齿啮合状态下齿轮传动平稳性更优, 振动噪声更小, 传动效率更高。

#### 3.6.2 不同载荷对齿轮传递误差的影响

为探究不同载荷对齿轮传递误差的影响规律, 保持齿轮设计参数不变, 对从动轮分别施加 100、300、800 N·m 载荷, 结果如图 11 所示。

由图 11 可知, 齿轮副传递误差为负值(从动轮传动滞后); 随转矩增大, 传递误差幅值与波动范围均显著增大, 单齿区与双齿区的误差差值同步增大。

## 4 设计参数对齿轮啮合刚度的影响

研究不同设计参数对齿轮啮合刚度的影响规律, 有助于在实际应用之中选取型号合适的齿轮, 提高传

动效率。本次重点研究齿宽、模数、压力角、刀盘半径对多齿啮合刚度的影响。

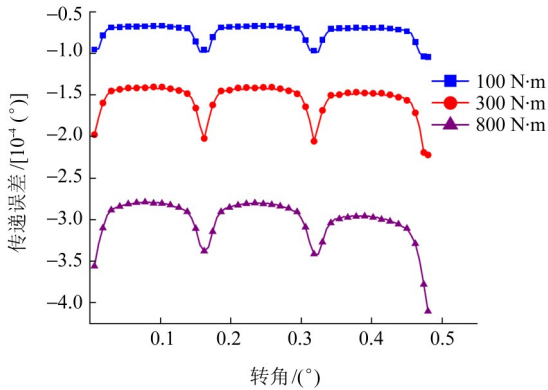


图 11 不同转矩对齿轮副传递误差的影响

Fig. 11 Effect of different torques on gear pair transmission error

#### 4.1 齿宽对齿轮啮合刚度的影响

以齿宽为唯一变量,其余设计参数如表3所示,不同齿宽对应的齿轮副重合度如表4所示,齿宽对啮合刚度的影响如图12所示。

表3 齿宽影响分析用VH-CATT圆柱齿轮设计参数

Tab. 3 Design parameters of the VH-CATT cylindrical gear for tooth width influence analysis

参数	主动轮	从动轮
齿数 $z$	40	60
模数 $m/\text{mm}$	3	3
压力角 $\alpha/(\text{°})$	20	20
刀盘半径 $R_f/\text{mm}$	80	80

表4 不同齿宽下VH-CATT圆柱齿轮重合度

Tab. 4 Contact ratio of the VH-CATT cylindrical gear under different tooth widths

齿宽 $B/\text{mm}$	20	30	45	60	75
重合度 $\varepsilon$	1.94	1.96	1.96	1.95	1.95

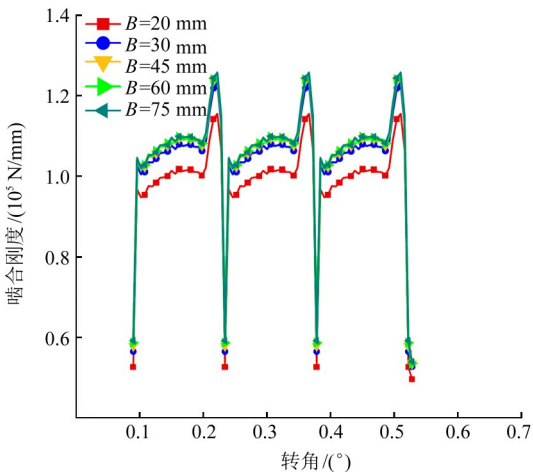


图 12 不同齿宽对VH-CATT圆柱齿轮啮合刚度的影响

Fig. 12 Effect of different tooth widths on VH-CATT cylindrical gear meshing stiffness

由图12可知,多齿轮副多齿啮合刚度随齿宽增大而提升,单齿与双齿啮合刚度的相对差值同步增大;齿宽超过45 mm后,啮合刚度增长速率显著降低,整体趋于平稳。该现象的核心作用机制为:齿宽增大使轮齿截面极惯性矩提升<sup>[18]15-33</sup>,弯曲变形减小,弯曲刚度增大;而接触刚度受齿宽变化的影响较小,因此齿轮副总刚度随齿宽增大而提升,达到临界齿宽后趋于稳定。

#### 4.2 模数对齿轮啮合刚度的影响

以模数为唯一变量,其余参数如表5所示,不同模数对应的重合度如表6所示,模数对啮合刚度的影响如图13所示。

表5 模数影响分析用VH-CATT圆柱齿轮设计参数

Tab. 5 Design parameters of the VH-CATT cylindrical gear for module influence analysis

参数	主动轮	从动轮
齿数 $z$	40	60
齿宽 $B/\text{mm}$	45	45
压力角 $\alpha/(\text{°})$	20	20
刀盘半径 $R_f/\text{mm}$	80	80

表6 不同模数下变VH-CATT圆柱齿轮重合度

Tab. 6 Contact ratio of the VH-CATT cylindrical gear under different modules

模数 $m/\text{mm}$	2	3	4	5
重合度 $\varepsilon$	2.08	1.96	1.92	1.92

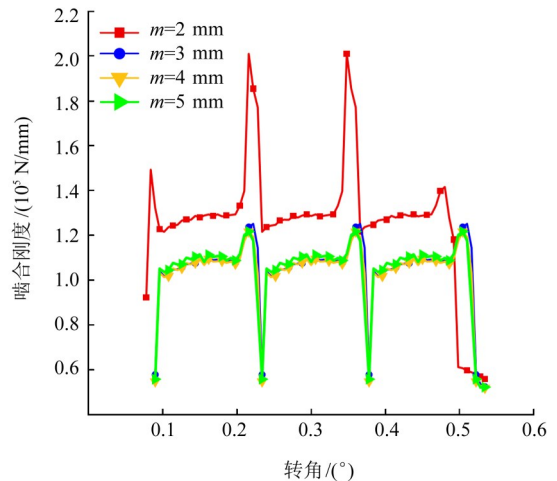


图 13 不同模数对VH-CATT圆柱齿轮啮合刚度的影响

Fig. 13 Effect of different modules on VH-CATT cylindrical gear meshing stiffness

由图13可知,多齿啮合刚度随模数增大而减小,单齿与双齿刚度的相对差值减小,传动平稳性提升;模数增大到一定值后,啮合刚度趋于稳定。原因是模数增大使齿厚、齿高等比例增加,弯曲刚度变化不明显,而分度圆半径增大导致接触力减小、接触椭圆长轴半径减小,接触刚度降低,总刚度随之减小,

由文献[19]<sup>15-33</sup>、文献[20]<sup>132-137</sup>可知,齿轮副的接触刚度减小,齿轮副总刚度减小,当模数达到一定程度后,齿面接触力逐渐变小,其对啮合刚度的影响趋于平稳。模数为 2 mm 时存在 3 齿啮合区,刚度显著高于其他模数工况。

### 4.3 压力角对齿轮啮合刚度的影响

压力角直接决定齿轮副重合度,而重合度直接影响齿轮啮合刚度。以压力角为唯一变量,其余设计参数如表 7 所示,重合度如表 8 所示,压力角对啮合刚度的影响如图 14 所示。

表 7 压力角影响分析用 VH-CATT 圆柱齿轮设计参数

Tab. 7 Design parameters of the VH-CATT cylindrical gear for pressure angle influence analysis

参数	主动轮	从动轮
齿数 $z$	40	60
模数 $m/\text{mm}$	3	3
齿宽 $B/\text{mm}$	45	45
刀盘半径 $R_f/\text{mm}$	80	80

表 8 不同压力角下 VH-CATT 圆柱齿轮重合度

Tab. 8 Contact ratio of the VH-CATT cylindrical gear under different pressure angles

压力角 $\alpha/(\circ)$	15	20	23	25
重合度 $\varepsilon$	2.34	1.96	1.92	1.84

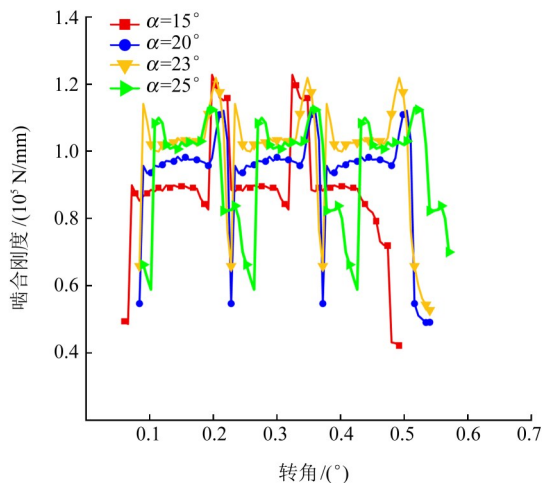


图 14 不同压力角对 VH-CATT 圆柱齿轮啮合刚度的影响

Fig. 14 Effect of different pressure angles on VH-CATT cylindrical gear meshing stiffness

由图 14 可知,齿轮啮合刚度随着压力角的增大而增大,单、双齿啮合刚度相对差值减小,单、双齿交替啮合更加平稳。当压力角为 15° 时,由重合度可知,存在 3 齿啮合区间,其啮合刚度显著大于双齿区,峰值接近于其他压力角工况下的峰值。当压力角增大超过 23° 时,啮合刚度总体稳定于一个范围之内。其原因由文献[19]<sup>15-33</sup>和文献[21]<sup>132-137</sup>可知,齿轮所受齿面接触力需同时考虑节点区域系数以及重合度系数,

随着压力角的增大,齿轮重合度降低,齿面接触力增大,接触椭圆长轴半径增大,接触刚度增大;齿轮齿根处齿厚增加,抗弯截面模量增大,弯曲刚度增大,齿轮副总刚度增大。

### 4.4 刀盘半径对齿轮啮合刚度的影响

刀盘半径直接决定齿轮副的接触区域与周向齿厚分布,进而影响齿轮啮合刚度。以刀盘半径为唯一变量,主、从动轮采用相同刀盘半径,其余设计参数如表 9 所示,不同刀盘半径对应的齿轮副重合度如表 10 所示,刀盘半径对啮合刚度的影响如图 15 所示。

表 9 刀盘半径影响分析用 VH-CATT 圆柱齿轮设计参数

Tab. 9 Design parameters of the VH-CATT cylindrical gear for cutter radius influence analysis

参数	主动轮	从动轮
齿数 $z$	40	60
齿宽 $B/\text{mm}$	45	45
模数 $m/\text{mm}$	3	3
压力角 $\alpha/(\circ)$	20	20

表 10 不同刀盘半径下 VH-CATT 圆柱齿轮重合度

Tab. 10 Contact ratio of the VH-CATT cylindrical gear under different cutter radius

刀盘半径 $R_f/\text{mm}$	60	80	120	150
重合度 $\varepsilon$	1.92	1.96	1.95	1.94

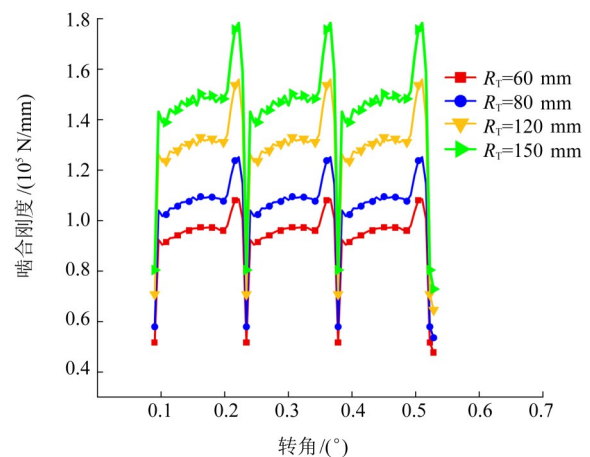


图 15 不同刀盘半径对 VH-CATT 圆柱齿轮啮合刚度的影响

Fig. 15 Effect of different cutter radius on VH-CATT cylindrical gear meshing stiffness

由图 15 可知,随着刀盘半径的增大齿轮的啮合刚度增加,单、双齿啮合刚度相对差值增大,说明齿轮单、双齿交替啮合时平稳性下降。由文献[19]<sup>15-33</sup>可知,随着刀盘半径增大,接触椭圆长轴半径增大,齿面接触力不变,齿轮接触刚度增加;由文献[20]<sup>132-137</sup>可知,刀盘半径增大,虽然齿轮的抗弯截面模量会有略微降低,但其对弯曲刚度的影响较小,接触刚度为主导因素,因此齿轮副总刚度增大。

## 5 结论

根据齿轮啮合刚度的理论计算式,使用有限元法计算出齿面节点的法向接触力和法向弹性变形,计算出节点啮合刚度,进而将齿面所有节点叠加,得到齿面啮合刚度。探究了齿宽、模数、压力角、刀盘半径对齿轮啮合刚度的影响,得出如下主要结论:

1) VH-CATT 圆柱齿轮啮合刚度随着齿宽的增加而增大,当齿宽达到一定值时,齿轮的啮合刚度趋于稳定。在设计时,齿宽应在一定范围内选取。

2) 齿轮啮合刚度随着模数的增大而减小,且减小幅度随着模数增大而减低,当模数到达一定值以后,啮合刚度趋于稳定。

3) 压力角对齿轮的啮合刚度影响显著,齿轮啮合刚度随着压力角的增大而增大,重合度降低,当压力角增大到一定值时,齿轮啮合刚度趋于平稳。

4) 齿轮啮合刚度随着刀盘半径的增大而增大。但刀盘半径过大,传动平稳性下降,刀盘半径过低,啮合刚度不够,同时还需考虑其他设计参数对齿轮啮合刚度共同造成的影响。

### 参考文献 (References)

- [1] 马振群,王小椿. 一种高性能重载齿轮的研究[J]. 西安交通大学学报,2002,36(3):282-286.  
MA Zhenqun, WANG Xiaochun. Research on a highly durable and heavy duty gearing [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2002, 36(3): 282-286. (In Chinese)
- [2] TSENG R T, TSAY C B. Mathematical model and undercutting of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(11/12): 1189-1202.
- [3] 吴阳,侯力,罗岚,等. 机床误差对圆弧齿线圆柱齿轮齿面误差影响规律的理论研究[J]. 机械工程学报,2020,56(21):100-109.  
WU Yang, HOU Li, LUO LAN, et al. Research on the effect law of machine tool errors on tooth surface errors of curvilinear gear [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2019, 56(21): 100-109. (In Chinese)
- [4] 赵斐,侯力,陈杨,等. 圆弧齿线圆柱齿轮全齿面数学模型及切齿条件分析[J]. 吉林大学学报(工学版),2020,50(3):875-885.  
ZHAO Fei, HOU Li, CHEN Yang, et al. Mathematical model and generating condition analysis of cylindrical gear with circular-arc-tooth - trace [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2020, 50(3): 875-885. (In Chinese)
- [5] 马登秋,叶振环,冯前军,等. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮齿面接触应力分布和啮合位置变化规律研究[J]. 制造技术与机床,2019(9):53-58.  
MA Dengqiu, YE Zhenhuan, FENG Qianjun, et al. Research on contact stress distribution and meshing position change rule of variable hyperbolic cylindrical gear with arcuate tooth trace [J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2019(9): 53-58. (In Chinese)
- [6] 罗岚,侯力,赵斐,等. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮传动几何特性分析[J]. 工程科学与技术,2018,50(1):171-179.  
LUO LAN, HOU Li, ZHAO Fei, et al. Analysis on geometric characteristics of cylindrical gear with variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace [J]. Advanced Engineering Sciences, 2018, 50(1): 171-179. (In Chinese)
- [7] 郭瑞. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮啮合行为及混合润滑特性研究[D]. 兰州:兰州理工大学,2022:66-90.  
GUO Rui. Research on meshing behaviour and mixed thermal elastohydrodynamic lubrication characteristics of the cylindrical gear with variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2022: 66-90. (In Chinese)
- [8] 魏永峭,郭瑞,刘永平,等. 变双曲圆弧齿线圆柱齿轮时变啮合刚度和传动误差分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2023,51(12):73-82.  
WEI Yongqiao, GUO Rui, LIU Yongping, et al. Analysis for time-varying meshing stiffness and transmission error of cylindrical gear with variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2023, 51(12): 73-82. (In Chinese)
- [9] 苟建平,侯力,吴阳,等. 基于有限元法的变双曲圆弧齿线齿轮啮合刚度分析[J]. 机械传动,2020,44(10):104-110.  
GOU Jianping, HOU Li, WU Yang, et al. Analysis of meshing stiffness of variable hyperbolic arc gear based on finite element method [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(10): 104-110. (In Chinese)
- [10] 李亚鹏,孙伟,魏静,等. 齿轮时变啮合刚度改进计算方法[J]. 机械传动,2010,34(5):22-26.  
LI Yapeng, SUN Wei, WEI Jing, et al. Study on the improved algorithm of the time-varying meshing stiffness of gear [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(5): 22-26. (In Chinese)
- [11] 卜忠红,刘更,吴立言. 斜齿轮啮合刚度变化规律研究[J]. 航空动力学报,2010,25(4):957-962.  
BU Zhonghong, LIU Geng, WU Liyan. Research on the variation of meshing stiffness of the helical gear [J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(4): 957-962. (In Chinese)
- [12] 唐进元,蔡卫星,王志伟. 修形圆柱齿轮啮合刚度计算公式[J]. 中南大学学报(自然科学版),2017,48(2):337-342.  
TANG Jinyuan, CAI Weixing, WANG Zhiwei. Meshing stiffness formula of modification gear [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2017, 48(2): 337-342. (In Chinese)
- [13] 吴鲁纪,杨世豪,冯伟,等. 斜齿轮时变啮合刚度改进算法及影响因素分析[J]. 机械强度,2024,46(2):312-319.  
WU Luji, YANG Shihao, FENG Wei, et al. Improvement algorithm of time-varying meshing stiffness of helical gear and analysis of influencing factors [J]. Journal of Mechanical Strength, 2024, 46(2): 312-319. (In Chinese)
- [14] 唐进元,蒲太平. 基于有限元法的螺旋锥齿轮啮合刚度计算[J]. 机械工程学报,2011,47(11):23-29.

- TANG Jinyuan, PU Taiping. Spiral bevel gear meshing stiffness calculations based on the finite element method [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47 (11) : 23-29. (In Chinese)
- [15] 廖平,魏静,张爱强,等.一种弧齿锥齿轮时变啮合刚度和传动误差半解析计算方法[J].机械传动,2019,43(12):50-56.  
LIAO Ping, WEI Jing, ZHANG Aiqiang, et al. A semi-analytical calculation method for time-varying meshing stiffness and transmission error of spiral bevel gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(12) : 50-56. (In Chinese)
- [16] KUANG J H, YANG Y T. An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair [C]// Proceedings of the 6th International Power Transmission and Gearing Conference: Advancing Power Transmission Into the 21st Century. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1992, DE-43-1 : 1-9.
- [17] FAYDOR L. Litvin gear geometry and applied theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004 : 1-32.
- [18] 张奎晓.基于时变啮合刚度的齿轮非线性动力学的研究[D].沈阳:东北大学,2013:7-27.  
ZHANG Kuixiao. Study on the gear nonlinear dynamic based on the time-varying meshing stiffness [D]. Shenyang: Northeastern University, 2013 : 7-27. (In Chinese)
- [19] 杜建霞,包广清.修形直齿锥齿轮副加载接触分析方法研究[J].机电工程,2023,40(7):1008-1016.  
DU Jianxia, BAO Guangqing. Loading contact analysis method of modified straight bevel gears[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2023, 40(7) : 1008-1016. (In Chinese)
- [20] LIU S T. Curvilinear cylindrical gears[J]. Gear Technology, 1988, 5(3) : 8-12.
- [21] 杨明忠,朱家诚.机械设计[M].武汉:武汉理工大学出版社,2001:129-151.  
YANG Mingzhong, ZHU Jiacheng. Mechanical design [M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2001 : 129-151. (In Chinese)

## Analysis of the influence of design parameters on meshing stiffness of the cylindrical gear with VH-CATT

FENG Taiyu<sup>1</sup> ZHAO Fei<sup>1</sup> LIU Changhao<sup>1</sup> LUO Lan<sup>2</sup> CHEN Zhongmin<sup>3</sup>

(1. School of Manufacturing Science and Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621000, China)

(2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

(3. R & D Center, Sichuan Jian'an Industrial Co., Ltd., Chengdu 625100, China)

**Abstract:** [Objective] Aiming at the problem that the influence law of design parameters on meshing stiffness of variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace (VH-CATT) cylindrical gears is not clear, the action characteristics of tooth width, module, pressure angle and cutter radius on meshing stiffness are revealed, so as to provide reference for parameter optimization design and transmission performance improvement of this type of gears. [Methods] Firstly, a gear mechanical model was established based on the meshing stiffness calculation model, and a finite element model of VH-CATT cylindrical gear was constructed combined with the tooth surface discrete node method to provide support for quantitative stiffness analysis; Secondly, static meshing simulation was carried out by Abaqus software, the normal contact force and comprehensive elastic deformation of tooth surface nodes were calculated, and the single-tooth and multi-tooth meshing stiffness were solved; Thirdly, the control variable method was adopted to change the four core design parameters respectively, and the influence law of a single parameter on meshing stiffness was explored; Finally, the accuracy of the finite element model was verified by stiffness calculation of standard spur gears to ensure the reliability of the research results. [Results] The meshing stiffness tends to be stable when the tooth width increases to 45 mm, and stabilizes in a fixed range when the pressure angle exceeds 23°; the meshing stiffness decreases gradually to stable with the increase of modulus, while increases continuously with the increase of cutter radius; when the pressure angle is 15°, the gear contact ratio reaches 2.34 with a three-tooth meshing zone, and the meshing stiffness is significantly higher than that of other angle conditions. The influence law of each parameter provides a quantitative basis for gear parameter selection.

**Key words:** Cylindrical gear with variable hyperbolic circular-arc-tooth-trace; Mesh stiffness; Design parameter; Finite element method; Parameter influence

Corresponding author: ZHAO Fei, E-mail: Soapzhao@126.com

Fund: Youth Science Fund Project of the Natural Science Foundation of Sichuan Province (2023NSFSC0855); Postdoctoral Special Funding Project of Sichuan Province (TB2022028); Central Government Guided Local Science and Technology Development Project (2023ZYDF088)

Received: 2024-06-06 Revised: 2024-07-17

(编辑:李凯阳)