

## 非均匀路面下被动行走机器人的吸引盆外部拓扑结构研究

赵天<sup>1</sup> 暴雨萌<sup>1</sup> 浮红<sup>2</sup> 高建设<sup>1</sup> 刘强<sup>2</sup>

(1. 郑州大学机械与动力工程学院, 郑州 450001)

(2. 河南省直第三人民医院, 郑州 450006)

**摘要:**【目的】吸引盆决定了被动行走机器人的全局稳定性,但其狭窄的形态给机器人在现实环境中的稳定行走带来了巨大的挑战。为解决该问题,对非均匀路面下被动行走机器人的吸引盆外部拓扑结构进行了研究。【方法】首先,建立了点足机器人在非均匀路面上行走的动力学模型;然后,利用相图、Poincaré截面图和吸引盆探究了机器人的步态变化和全局稳定性,其中,重点研究外界环境因素对系统吸引盆的影响,并对吸引盆的外部拓扑结构进行分类分析;最后,利用Adams软件仿真验证了稳定极限环的行走步态。【结果】结果表明,吸引盆外部拓扑结构具有分形特征,其中机器人能至少行走1步的区域占整个状态空间的41.28%。引入路面环境干扰会导致吸引盆的面积减小,但对盆外部拓扑结构的影响较小。研究结果拓展了被动行走理论的适用范围,并为步态初始条件的选择提供了更大的空间。

**关键词:** 被动行走; 非均匀路面; 极限环; 吸引盆; 外部拓扑

**中图分类号:** TP242 **DOI:** 10.16579/j.issn.1001.9669.2026.03.005

## 0 引言

被动行走机器人<sup>[1]</sup>是一种不需要驱动和控制系统,仅依靠重力和自身惯性即可在缓坡上实现稳定行走的机构,具备能耗低与步态自然的特性,为揭示人类行走的机制和设计高效节能的双足机器人提供了全新思路。该机器人的稳定步态在相空间中为一个封闭的环,因此其行走方式被称为“极限环行走”<sup>[2]</sup>,一个完整的步态由腿的连续摆动阶段和足、地碰撞阶段2部分组成,因此被动行走机器人的步态属于典型的脉冲混杂系统<sup>[3]</sup>,其动力学特性较为复杂。研究者建立了多种模型对被动行走动力学特性进行探索。罗盘模型作为其中的经典模型,仅考虑基础步行原理和腿部质量分布问题,这种简单的结构更有利于研究双足步行原理及发掘被动行走潜在的动力学特性。GOSWAMI等<sup>[4]</sup>在对罗盘模型的研究中首次报道了引发步态失稳的分岔路径,即从倍周期分岔通向混沌。GRITLI等<sup>[5]</sup>在罗盘模型中首次发现了双边界激变事件,这是导致机器人摔倒的重要动力学机制。ASANO等<sup>[6]</sup>以罗盘模型为研究对象,提出虚拟重力场的概念,实现了机器人的平地行走。

目前,对被动行走机器人的研究主要集中在平整的斜面环境中<sup>[7]</sup>,而在实际路面环境中,路面起伏、凹凸等因素造成的干扰不可避免<sup>[8]</sup>,仅研究理想化的斜面环境难以满足行走机器人的实际行走要求。因此,研究被动行走机器人在非均匀路面上的行走具有重要的意义和工程应用价值。近年来,针对该领域的研究已经取得了一定的成果。AFSHAR等<sup>[9]</sup>423-433令罗盘模型在结构化的粗糙斜面上行走,利用Floquet乘子和摔倒前的平均步数来量化被动行走机器人的稳定性,发现随着粗糙度的增加,机器人的步态稳定性成非线性降低;HOBBELEN等<sup>[10]</sup>令被动行走机器人在高度随机变化的台阶上行走,综合考虑模型步态的Floquet乘子和所能承受的最大扰动,将步态敏感范数作为鲁棒性的评价指标;SU等<sup>[11]</sup>利用Floquet乘子和步态变异性系数等工具,研究了随机扰动的不规则路面对最简模型步态的影响;柳宁<sup>[12]</sup>利用崎岖路面考查了圆弧足被动行走机器人的鲁棒性,并用平均摔倒率描述它的抗干扰能力。综上所述,研究者多利用Floquet乘子等数值工具来考查机器人在非均匀路面上行走时步态的稳定性<sup>[13-15]</sup>,其中Floquet乘子多作为判定周期步态局部稳定性的依据。然而,目前对被动行走机器人在非均匀

收稿日期: 2024-03-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(59106225)

作者简介: 赵天,男,1999年生,河南开封人,在读硕士研究生; 主要研究方向为被动行走机器人非线性动力学特性; E-mail: ZhaoTian\_zzu@163.com。  
刘强(通信作者),男,1977年生,河南郑州人,硕士,主任医师,博士研究生导师; 主要研究方向为下肢骨科康复; E-mail: 13253438290@126.com。

引用格式: 赵天,暴雨萌,浮红,等. 非均匀路面下被动行走机器人的吸引盆外部拓扑结构研究[J]. 机械强度,2026,48(3):37-46.

ZHAO Tian, BAO Yumeng, FU Hong, et al. Study on the external topology structure of the basin of attraction for passive walking robots on rough terrain[J]. Journal of Mechanical Strength, 2026, 48(3):37-46.



免费获取

路面上的全局稳定性的分析鲜有涉及。

机器人的全局稳定性是由极限环的吸引盆的大小决定的。众多研究者对机器人的吸引盆进行了研究。SCHWAB等<sup>[16]</sup>利用胞映射方法计算了最简模型的吸引盆,结果表明,该模型的吸引盆范围非常小。刘铖等<sup>[17]</sup>研究了不同系统参数下柔性双足机器人的步态周期吸引盆的变化,并通过改变机器人的参数获得了较大的吸引盆。高家昌等<sup>[18]</sup>利用吸引盆对比分析了平板足机器人的结构参数对系统全局稳定性的影响,并得到了优选参数的组合。上述文献多利用吸引盆来分析系统的稳定性,而忽视了吸引盆的外部状态空间对机器人步态的影响。

鉴于上述背景,本文以罗盘模型为研究对象,采用正弦函数构建起伏路面的特征,用于模拟非均匀路面环境,然后利用Poincaré截面图和步态极限环图分析路面不平度<sup>[19]</sup>大小对行走机器人步态的影响。此外,详细研究吸引盆的外部拓扑结构,并探究路面不平度变化时系统吸引盆的演变过程。最后,使用Adams软件验证罗盘模型的行走能力,从吸引盆内部选择运动初值,得到稳定的双足行走步态。本文的研究结果拓展了被动行走理论的适用范围。

## 1 罗盘模型及非均匀路面建模

### 1.1 罗盘模型动力学建模

以罗盘模型为研究对象,其示意图如图1所示。该模型由2条完全相同的刚性直腿和1个髋关节组成。其中, $m$ 为腿部质量; $a$ 为腿质心到髋关节的距离; $L$ 为腿长; $b$ 为腿质心到足端的距离; $m_H$ 为髋关节的质量; $\varphi$ 为斜面的倾角。各参数的取值如表1所示。 $\theta_s$ 和 $\theta_{ns}$ 分别为支撑腿、摆动腿与垂直方向的夹角; $2\alpha$ 为跨距角。它们的方向均以逆时针方向为正方向。

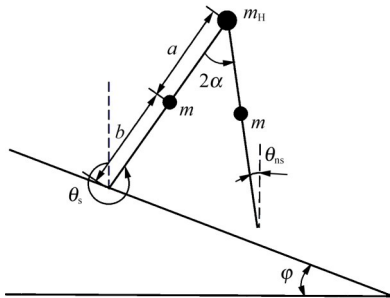


图1 罗盘模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the compass model

对罗盘模型的运动做如下假设:

- 1)腿为刚性直腿且关节处无阻尼、无摩擦。
- 2)机器人行走过程中摆动腿无擦地现象。

表1 罗盘模型参数

Tab. 1 Compass model parameters

| 参数                   | 数值      |
|----------------------|---------|
| $m_H/\text{kg}$      | 2       |
| $m/\text{kg}$        | 1       |
| $a/\text{mm}$        | 500     |
| $b/\text{mm}$        | 500     |
| $\varphi/\text{rad}$ | 0.052 4 |

3)足、地碰撞为完全非弹性碰撞,且满足角动量守恒定律。

4)足、地碰撞瞬时完成,且支撑腿相对路面无滑移、无弹起。

在机器人的行走过程中,一个完整的步态周期可分为单腿支撑的摆动阶段和双腿着地的碰撞阶段,下面将分别建立这2个阶段的动力学方程。

1)摆动阶段。在该阶段,摆动腿绕髋关节转动,支撑腿则围绕足地接触点做倒立摆运动。由于此过程中仅有重力做功,因此整个系统的机械能是守恒的。利用第2类拉格朗日方程推导出的此阶段的动力学方程为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_s, \theta_{ns}]^T$ ;  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_s, \dot{\theta}_{ns}]^T$ 。为了使动力学方程具有普遍性,对某些参数进行无量纲化处理。令 $\beta_m = m_H/m$ 、 $\beta_b = b/a$ 、无量纲时间 $t_{un} = t\sqrt{g/L}$ ,其中, $g$ 为重力加速度,式(1)中各矩阵的表达式分别为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_b^2 & -\beta_b(\beta_b + 1)\cos(\theta_s - \theta_{ns}) \\ -\beta_b(\beta_b + 1)\cos(\theta_s - \theta_{ns}) & 1 + (\beta_m + 1)(\beta_b + 1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_b(\beta_b + 1)\sin(\theta_s - \theta_{ns})\dot{\theta}_s \\ \beta_b(\beta_b + 1)\sin(\theta_s - \theta_{ns})\dot{\theta}_{ns} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{g}{a} \begin{bmatrix} \beta_b \sin \theta_{ns} \\ -[2 + \beta_m(\beta_b + 1) + \beta_b] \sin \theta_s \end{bmatrix}$$

2)足、地碰撞阶段。摆动阶段结束后,机器人的摆动腿与斜面接触,产生碰撞。在碰撞瞬间,机器人的位姿保持不变,但双腿的角速度发生突变。此时,根据角动量守恒定律,建立的碰撞阶段的代数方程为

$$\mathbf{Q}^-(\alpha)\dot{\boldsymbol{\theta}}^- = \mathbf{Q}^+(\alpha)\dot{\boldsymbol{\theta}}^+ \quad (2)$$

式中, $\mathbf{Q}(\alpha)$ 为角动量矩阵;上标“-”和“+”用于区分碰撞前、后系统的状态。 $\mathbf{Q}^-(\alpha)$ 、 $\mathbf{Q}^+(\alpha)$ 的表达式分别为

$$\mathbf{Q}^-(\alpha) = \begin{bmatrix} -\beta_b & -\beta_b + [\beta_m(1 + \beta_b)^2 + 2(1 + \beta_b)] \cos 2\alpha \\ 0 & -\beta_b \end{bmatrix},$$

$$Q^*(\alpha) = \begin{bmatrix} \beta_b^2 - \beta_b(1 + \beta_b)\cos 2\alpha & 1 + (1 + \beta_b)^2(1 + \beta_m) - \beta_b(1 + \beta_b)\cos 2\alpha \\ \beta_b^2 & -\beta_b(1 + \beta_b)\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

## 1.2 非均匀路面建模

在以往的研究中,机器人的步行环境多为理想化的平坦斜面(图 1),而机器人在实际行走环境中的稳定性尚不明确。本节以平坦路面为基准,利用正弦函数模拟具有起伏的非均匀行走路面,此函数以原斜面为  $x$  轴,如图 2 所示,其表达式为

$$y = A_0 \sin \omega x \quad (3)$$

式中, $y$  为路面的高度; $x$  为机器人沿着路面向下行走的距离; $A_0$  为路面不平度,用于表示路面激励的强度; $\omega$  为控制路面起伏变化的频率。调整  $A_0$  和  $\omega$ ,可以对路面特征进行调节。

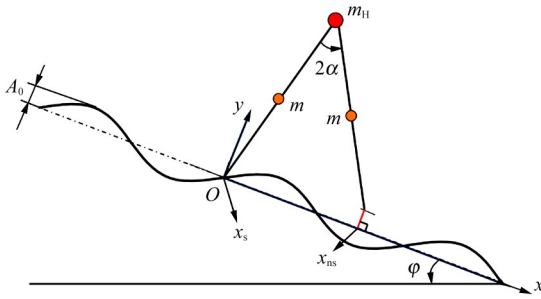


图 2 非均匀路面结构图

Fig. 2 Structure diagram of the rough terrain

需强调的是,机器人在非均匀路面上行走时,其动力学方程并未变化,但路面结构会影响足地碰撞时机器人的位姿,此时机器人的两足不再同时处于基准斜面上,而是满足以下关系:

$$h_s + A_0 \sin \omega x_s = h_{ns} + A_0 \sin \omega x_{ns} \quad (4)$$

式中, $x_s, x_{ns}$  分别为支撑腿和摆动腿的横坐标; $h_s, h_{ns}$  则分别为  $y$  轴方向上支撑腿、摆动腿足端到髋关节的距离,它们的表达式分别为

$$\begin{cases} h_s = L \cos(\theta_s + \varphi) \\ h_{ns} = L \cos(\theta_{ns} + \varphi) \end{cases} \quad (5)$$

由于地表轮廓会对机器人的步态产生影响,因此需建立机器人位姿与路面函数之间的关联。显然,明确双腿足端的横坐标,即可确定机器人在碰撞时刻的位姿。鉴于此,设置机器人从坐标原点出发(第 1 步的  $x_s$  的值为 0),那么运动过程中摆动腿足端的横坐标  $x_{ns}$  可表示为

$$x_{ns} = x_s + L[|\sin(\theta_s + \varphi)| + |\sin(\theta_{ns} + \varphi)|] \quad (6)$$

当完成 1 次足、地碰撞后,原摆动腿将变为新支撑腿,此时将  $x_{ns}$  赋给  $x_s$ ,即  $x_{s(i+1)} = x_{ns(i)}$ ,其中, $i$  为机器人的行走步数。

将式(5)、式(6)代入式(4)中,即可得到机器人在非均匀路面上行走的触地检测条件:

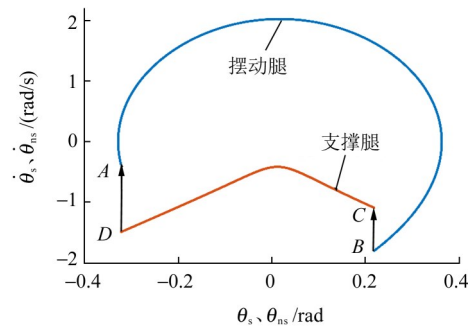
$$\begin{aligned} L[\cos(\theta_s + \varphi) - \cos(\theta_{ns} + \varphi)] &= A_0 \sin \omega x_s - \\ &A_0 \sin(\omega \{x_s + L[|\sin(\theta_s + \varphi)| + |\sin(\theta_{ns} + \varphi)|]\}) \end{aligned} \quad (7)$$

## 2 非均匀路面对极限环步态的影响

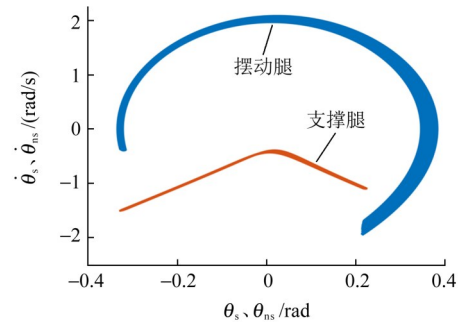
机器人在非均匀路面上行走时,路面激励作用将导致机器人的运动位姿发生改变,进而影响机器人的步长、迈步高度及行走速度。因此,本节将重点分析路面不平度  $A_0$  的增大对机器人极限环步态的影响。同时,将另一路面特征参数  $\omega$  取固定值  $3 \text{ rad/mm}^{[9]428-429}$ 。

### 2.1 参数 $A_0$ 对极限环步态的影响

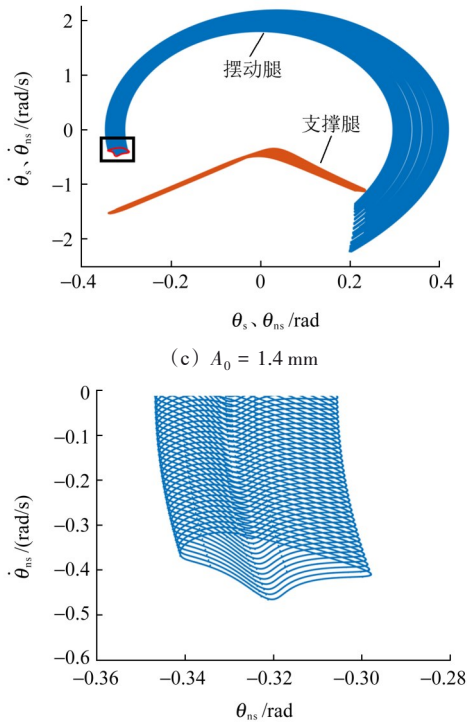
被动行走机器人固有的鞍点特性导致其稳定性相对较弱<sup>[20]</sup>,并且对于初始条件的要求十分苛刻,稍有偏差便可能导致行走失败。因此,为了保持稳定行走,必须为机器人选择合适的运动初值。采用 Newton-Raphson 算法,结合 4 阶 Runge-Kutta 法,获得表 1 所示参数下机器人的步态初值  $[\theta_s, \dot{\theta}_s, \theta_{ns}, \dot{\theta}_{ns}] = [0.2187 \text{ rad}, -1.0918 \text{ rad/s}, -0.3234 \text{ rad}, -0.3772 \text{ rad/s}]$ 。机器人由此状态出发,其运动轨迹在相空间中最终形成一个封闭的极限环,此时步态周期为 1,如图 3(a)所示。图 3(a)中各曲线的含义为:在  $A-B$  阶段(摆动腿曲线),摆动腿离开地面并持续向前摆动,角速度先增大后减小,跨距角则先减小后增大,机器人的运动示意图对应图 4(a)、图 4(b);在  $B-C$  阶段,摆动腿足端与地面发生碰撞,对应图 4(c)、图 4(d);在  $C-D$  阶段(支撑腿曲线),原摆动腿变为新支撑腿,机器人开始下一步行走,对应图 4(e)、图 4(f)。



(a)  $A_0 = 0 \text{ mm}$



(b)  $A_0 = 0.5 \text{ mm}$



(d) 图3(c)中黑色框内区域的放大图

图3 机器人步态的极限环图

Fig. 3 Limit cycle diagrams of the robot gait

当路面不平度增大至 $A_0 = 0.5 \text{ mm}$ 时,机器人的极限环如图3(b)所示。此时,由于路面非均匀性的激励作用,相轨迹显著偏离了理想环境( $A_0 = 0 \text{ mm}$ )下的极限环,这导致机器人稳定行走时的步态分布范围扩大,原有的第1周期的步态因此受到破坏。当 $A_0$ 继续增大至 $1.4 \text{ mm}$ 时,机器人的极限环如图3(c)所示,此时,相轨迹的范围变得更大,表明机器人的步态随着路面不平度的增大变得更加混乱。由图3(a)~图3(c)可知,当机器人在非均匀路面上行走时,原本的第1周期的步态失稳,表现出类似混沌步态的特征。但仔细观察图3(c)中矩形框发现,系统的相轨迹为相互缠绕的封闭曲线,如图3(d)所示,这是拟周期特点的明显标志。因此,为更准确地辨识当前机器人的行走状态,需采用Poincaré映射对相轨迹做进一步研究。

## 2.2 Poincaré映射

应用Poincaré映射,进一步分析路面不平度 $A_0$ 对机器人的极限环步态的影响。对于 $N$ 维动力系统,在相空间中选取 $N - 1$ 维超平面作为Poincaré截面,如图5所示。分析系统运动轨迹与Poincaré截面交点的分布规律可简化研究。设映射点依次为 $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ 。相空间中的连续轨迹运动方程在Poincaré截面上表现为离散点之间的映射:

$$P_{n+1} = TP_n \quad (8)$$

式中, $T$ 为Poincaré映射。本文选取被动机器人的摆动腿足端与非均匀路面碰撞后的瞬间投影面作为

Poincaré截面。

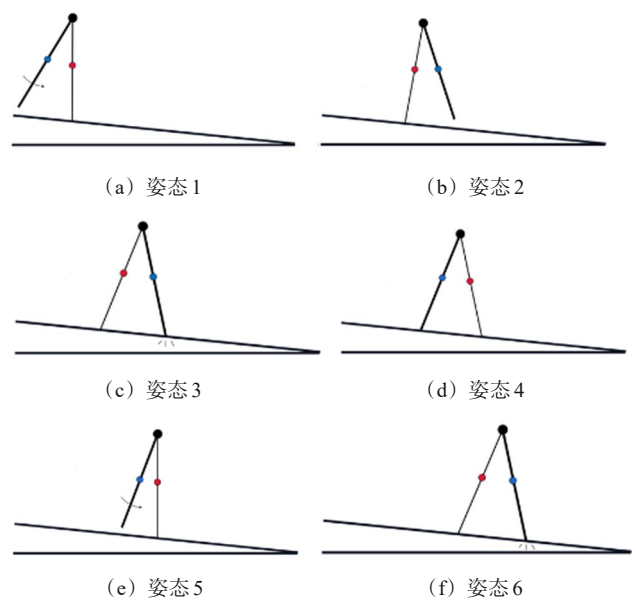


图4 极限环行走过程示意图

Fig. 4 Schematic diagrams of the limit cycle walking process

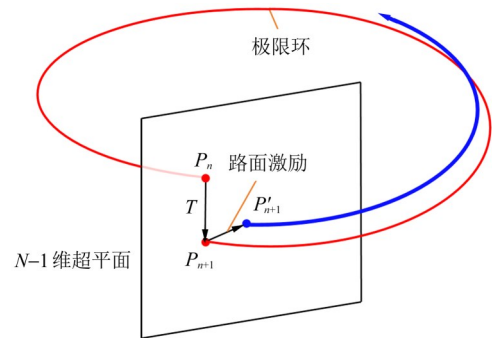


图5 Poincaré映射和系统极限环示意图

Fig. 5 Schematic diagrams of the Poincaré map and limit cycle of the system

图6所示为非均匀路面下被动机器人的步态吸引子在Poincaré截面上的投影,投影面选择为 $(\theta_s, \dot{\theta}_s)$ 。当路面不平度 $A_0 = 0 \text{ mm}$ 时,步态吸引子在Poincaré截面上呈现为1个不动点,如图6中的星号所示,此时系统在相空间中的轨迹为1个稳定的极限环;当 $A_0 = 0.5 \text{ mm}$ 时,步态吸引子由不动点演化为1个 $T^1$ 不变圈(封闭曲线),这表明系统步态具有拟周期的特点;当 $A_0 = 1.4 \text{ mm}$ 时, $T^1$ 不变圈的尺寸变大,并且逐渐变形,这表明非均匀路面的激励程度增强,导致系统轨迹偏离原本极限环的程度加大;当 $A_0 = 1.48 \text{ mm}$ 时, $T^1$ 不变圈破裂,机器人的步态逐渐失稳。

综上所述,随着参数 $A_0$ 的增大,系统的步态吸引子偏离极限环的程度增大。这将导致极限环轨迹不断靠近吸引盆的边缘,甚至可能跃迁到吸引盆的外部,从而造成机器人步态失稳。第3节将探究吸引盆的外部域对机器人步态的影响。

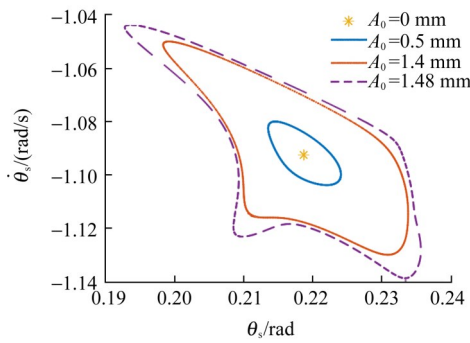


图 6 Poincaré 截面  
Fig. 6 Poincaré cross section

### 3 被动行走机器人的吸引盆

极限环步态的动态稳定性对外界干扰十分敏感,而非均匀路面的干扰使得机器人稳定步态的维持变得更加困难。为探究系统对非均匀路面干扰的承受能力和吸引盆外部域作为初值时的步态稳定性,利用胞映射法<sup>[21]</sup>求解系统的吸引盆,将系统的连续状态空间  $\theta_s \times \dot{\theta}_s = [0.1, 0.5] \text{ rad} \times [-2, -0.6] \text{ rad/s}$  离散为  $1\,000 \times 1\,000$  的胞状态空间,并将每个几何体的中心作为初值参与运算。相比于直接进行数值积分,胞映射算法将状态的转移对应于胞的转移,每个胞仅需映射 1 次,从而提高了运算效率。本文利用该方法绘制了系统的吸引盆及其外部拓扑结构,并对吸引盆的外部拓扑结构<sup>[22]</sup>进行了分类分析。

#### 3.1 吸引盆及其外部拓扑结构

图 7 所示为吸引盆及其外部拓扑结构,图 7 中的黑色区域(在颜色带中用字母 C 表示)为在  $\varphi = 0.052\,4 \text{ rad}$  的平坦斜面( $A_0 = 0 \text{ mm}$ )上行走时被动机器人的吸引盆。将在该区域内选取的初值作为数值仿真的初始条件,可使机器人保持稳定行走。然而,吸引盆的面积只占整个状态空间的 5.12%,这说明机器人为了保持稳定行走,对初始条件有极高的要求。为拓展步态初始值的选择空间,有必要对吸引盆的外部域做进一步研究。

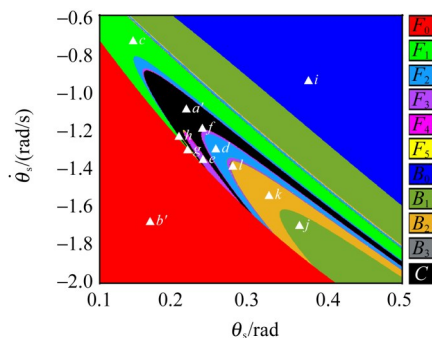


图 7 吸引盆及其外部拓扑结构

Fig. 7 Basin of attraction and its external topology structure

在图 7 中,吸引盆外部域颜色所代表的含义在右侧的颜色带中标明。其中,  $F$  和  $B$  分别表示机器人向前和向后摔倒,下标表示摔倒前能够行走的步数,例如,  $F_2$  代表机器人走了 2 步后向前摔倒。当数值仿真的初始值位于图 7 中的  $F_0$  域内时,由于初始速度过高,机器人将直接向前摔倒;而  $B_0$  域则刚好相反,在该区域中,机器人的初始速度过小,导致机器人无法克服死点而直接向后摔倒。 $F_0$  与  $B_0$  区域中间的部分代表机器人至少能够行走 1 步,该区域内速度初始值的选择在很大程度上决定了机器人能够行走的步数。此外,观察吸引盆周围的窄缝可发现大量类似于“V”形的分形色块。当初始值位于吸引盆边界附近时,机器人能够行走的步数明显增加。该现象表明,初始条件的微小差异可能会对机器人行走的步数和摔倒方式产生显著影响。

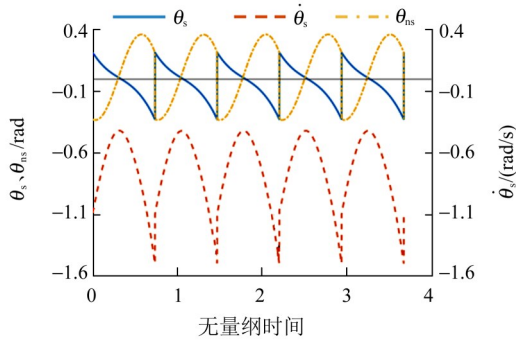
由于机器人除了受重力之外不受外部控制,且吸引盆十分狭小,因此从物理模型中很难在适当范围内选择初始值。而机器人至少能行走 1 步的区域占整个状态空间的 41.28%,应当将该区域作为试验中步态初始值的可选范围,以增加机器人成功行走的机会。

为验证吸引盆外部拓扑结构计算的准确性,在图 7 中不同颜色的区域内均选择初值,进行数值模拟,并在图 7 中用三角符号标记所选择初值的位置点,对应的步态初始值如表 2 所示。图 8 所示为  $\theta_s, \dot{\theta}_s, \theta_{hs}$  这 3 个状态变量的时间响应,图 8 中的黑色直线为一条参考线,表示支撑腿和摆动腿的角位移相等时的角度值,在图 8 中,显示了机器人的摔倒方式、摔倒前能够行走的步数及机器人摔倒的时刻。

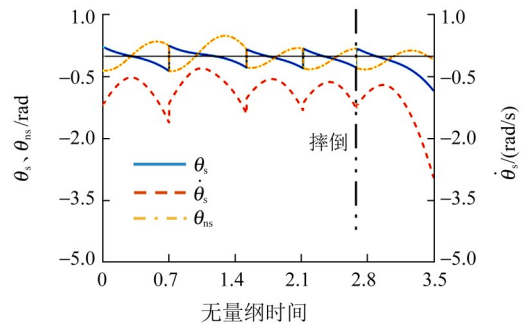
表 2 步态初始条件

Tab. 2 Initial gait conditions

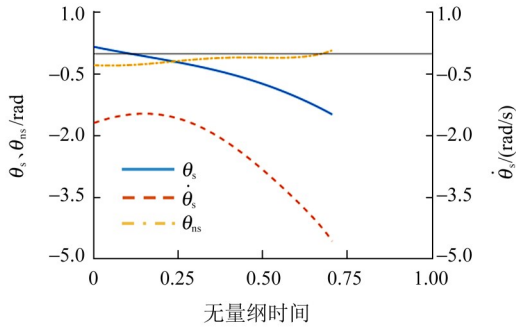
| 位置点  | $\theta_s/\text{rad}$ | $\dot{\theta}_s/(\text{rad/s})$ | $\theta_{hs}/\text{rad}$ | $\dot{\theta}_{hs}/(\text{rad/s})$ | 行走步数      | 摔倒方式 |
|------|-----------------------|---------------------------------|--------------------------|------------------------------------|-----------|------|
| $a'$ | 0.218 7               | -1.091 8                        | -0.323 5                 |                                    | $+\infty$ | 正常步态 |
| $b'$ | 0.173 5               | -1.689 5                        | -0.278 3                 |                                    | 0         | 向前   |
| $c$  | 0.144 4               | -0.728 7                        | -0.249 2                 |                                    | 1         | 向前   |
| $d$  | 0.255 0               | -1.282 5                        | -0.359 8                 |                                    | 2         | 向前   |
| $e$  | 0.238 3               | -1.360 8                        | -0.343 1                 |                                    | 3         | 向前   |
| $f$  | 0.236 3               | -1.202 8                        | -0.341 1                 |                                    | 4         | 向前   |
| $g$  | 0.217 1               | -1.288 1                        | -0.321 9                 | -0.377 2                           | 5         | 向前   |
| $h$  | 0.207 4               | -1.232 2                        | -0.312 3                 |                                    | 6         | 向前   |
| $i$  | 0.384 5               | -0.962 2                        | -0.489 3                 |                                    | 0         | 向后   |
| $j$  | 0.368 5               | -1.723 1                        | -0.473 3                 |                                    | 1         | 向后   |
| $k$  | 0.316 6               | -1.534 3                        | -0.421 4                 |                                    | 2         | 向后   |
| $l$  | 0.274 2               | -1.369 2                        | -0.379 0                 |                                    | 3         | 向后   |



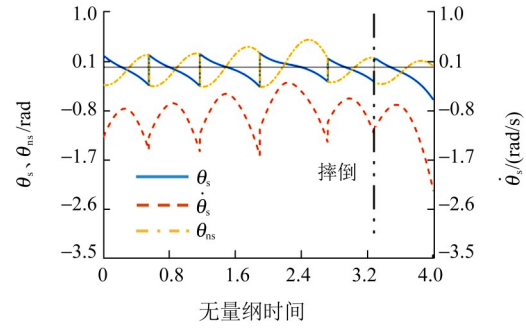
(a) 位置点  $a'$  (稳定步态)



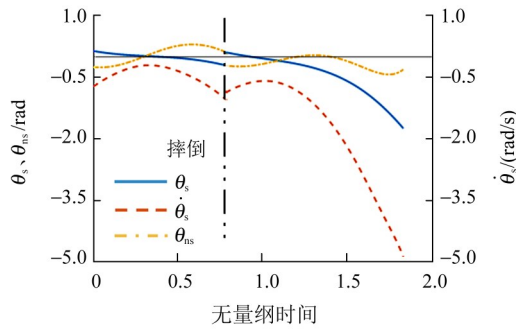
(f) 位置点  $f$



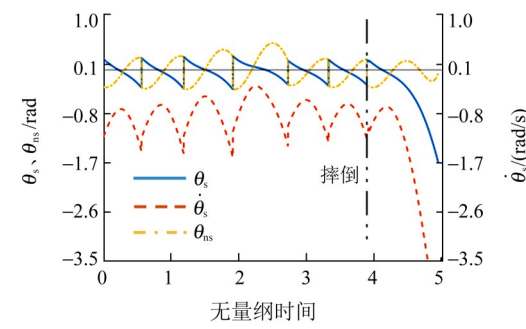
(b) 位置点  $b'$



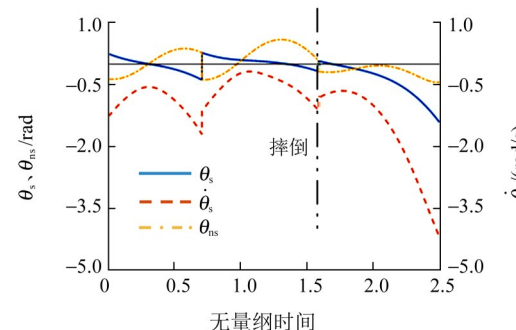
(g) 位置点  $g$



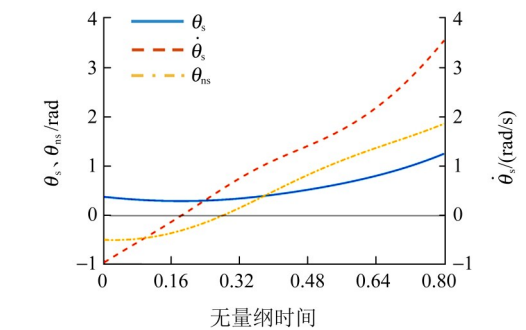
(c) 位置点  $c$



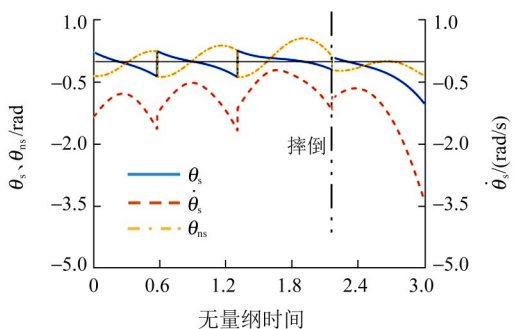
(h) 位置点  $h$



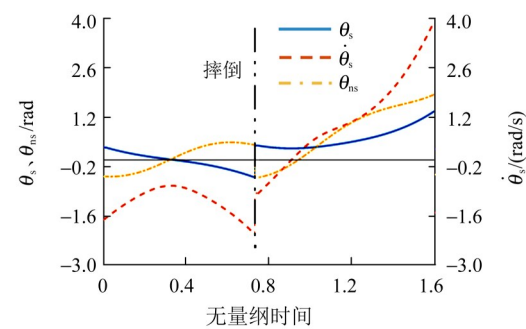
(d) 位置点  $d$



(i) 位置点  $i$



(e) 位置点  $e$



(j) 位置点  $j$

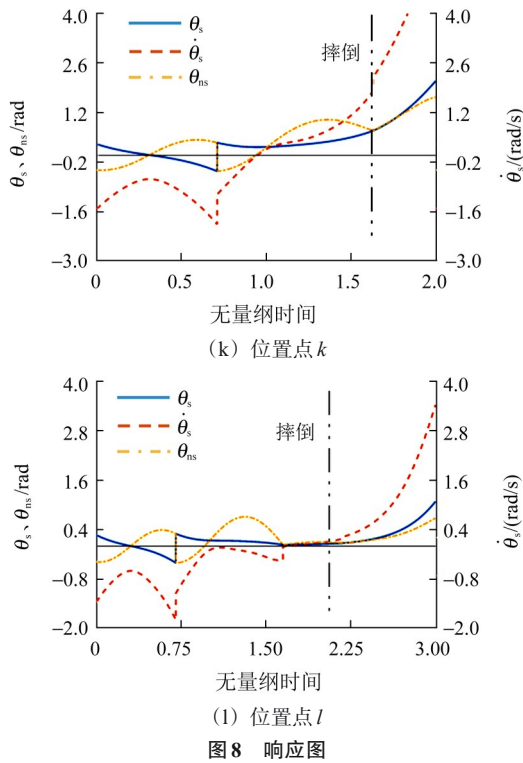


图 8 Response diagrams

图 8(a)所示为机器人在斜面上行走时的稳定步态,支撑腿角位移 $\theta_s$ 随着时间的推移而不断减小,在 $\theta_s = \varphi$ 的位置与摆动腿角位移 $\theta_{ns}$ 的曲线相交,此时机器人的 2 条腿重合,其整体位姿垂直于行走的斜面;随后, $\theta_s$ 与 $\theta_{ns}$ 的曲线首尾相交,支撑腿角速度 $\dot{\theta}_s$ 发生突变,此时机器人的摆动腿与地面相撞,系统完成支撑腿与摆动腿的互换。图 8(b)所示为机器人直接向前摔倒的情况,与稳定步态相比, $\theta_s$ 与 $\theta_{ns}$ 相交的位置满足 $|\theta_s| = |\theta_{ns}| > \varphi$ ,这表明由于输入的角速度过高,机器人在双腿重合瞬间整体位姿相对于斜面前倾, $\dot{\theta}_s$ 先增加,然后迅速减小,机器人在第 1 步完成之前便直接摔倒。图 8(c)~图 8(h)所示分别为机器人行走了 1、2、3、4、5、6 步之后向前摔倒。在这些情况中,在完成最后一次足地碰撞后,在双腿重合的瞬间,机器人整体位姿均处于前倾状态,而支撑腿角速度 $\dot{\theta}_s$ 始终小于 0 rad/s。图 8(i)~图 8(l)所示分别为经过 0、1、2、3 步后机器人向后摔倒的情况。与向前摔倒相比,机器人在完成最后一次足地碰撞后,支撑腿角速度 $\dot{\theta}_s$ 迅速增加,最终超过了 0 rad/s。

### 3.2 参数 $A_0$ 变化下的吸引盆

针对斜面倾角 $\varphi = 0.0524$  rad,路面不平度 $A_0$ 分别为 0.5、1.4、1.5、3 mm 时的机器人行走情况进行数值仿真。图 9 所示为被动行走机器人的吸引盆及其外部拓扑结构,将状态平面 $\theta_s \times \dot{\theta}_s = [0.14, 0.3]$  rad  $\times$   $[-1.5, -0.8]$  rad/s 离散成  $1\,000 \times 1\,000$  的胞状态平面,用于评估相空间中的全局拓扑对环境参数的依赖性。

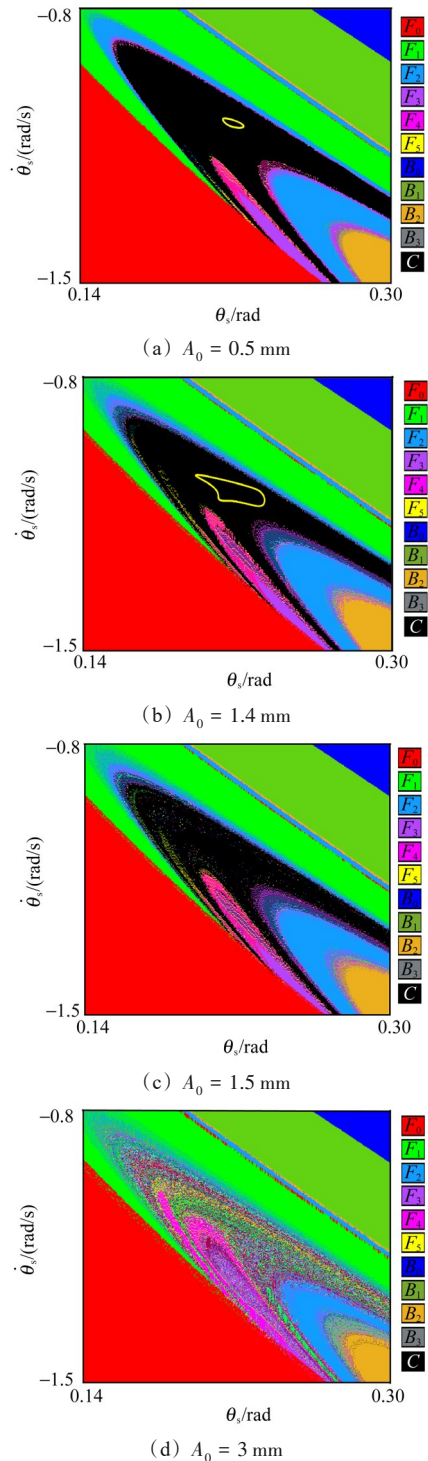
图 9 参数 $A_0$ 变化下系统的吸引盆及其外部拓扑结构

Fig. 9 Basins of attraction and their external topology structure of the system with the variation of parameter  $A_0$

当 $A_0$ 为 0.5 mm 时,系统的吸引盆如图 9(a)所示,盆内部的黄色封闭曲线代表了机器人的步态吸引子。此时外界环境的激励幅值相对较小,系统的吸引盆及其外部拓扑结构与平坦斜面上的基本相似,但吸引盆的边界变得更加粗糙,这表明吸引盆边界处的步态初始值已不再稳定。当 $A_0$ 增至 1.4 mm 时,系统的吸引盆情况发生了显著变化,如图 9(b)所示。此时吸引盆破碎,并且出现了缝隙;区域 $F_2$ 和 $F_3$ 逐渐占据了吸引

盆的边界位置,同时区域 $F_4$ 和 $F_5$ 开始侵蚀吸引盆的内部。该变化导致吸引盆面积减小,从而使得系统的全局稳定性降低。值得注意的是,随着 $A_0$ 的增大,步态吸引子[图9(b)中的黄色封闭曲线]的尺寸增大,并逐渐向吸引盆的边界靠近。在这种情况下,即使引入微小的扰动,也可能导致机器人的步态轨迹逃逸出吸引盆,最终导致机器人摔倒。

当 $A_0$ 为1.5 mm时,系统的吸引盆情况如图9(c)所示。此时系统的吸引盆内部具有大量的发散解,机器人的步态吸引子消失,这表明机器人在任何初始条件下都无法收敛到稳定的极限环上。此时吸引盆的面积仅为 $A_0 = 0$  mm时面积的37.42%,系统的全局稳定性显著下降,机器人无法保持稳定的行走状态。因此,机器人能承受的最大路面不平度 $A_0$ 为1.4 mm,该长度为机器人腿长的1.4‰。而当 $A_0$ 增至3 mm时,系统的吸引盆发生了显著的变化,如图9(d)所示。此时,原本的吸引盆完全消失,取而代之的是各种发散解,吸引盆的拓扑结构发生了重大改变,系统的全局稳定性严重受损。

#### 4 仿真实证

建立直腿被动行走机器人的三维仿真模型,利用Adams软件对机器人的行走过程进行仿真,以验证前文计算的正确性。图10所示为被动行走机器人的三维仿真模型,该模型包含1个髋关节和4足内、外腿结构。其中,内侧双腿通过螺栓连接保持稳定,并通过轴承与髋关节转轴配合;外侧双腿则与轴直接固定连接。这种设计能使机器人在不需要额外支撑的情况下沿着斜坡行走,并且避免了行走过程中的侧倒现象。

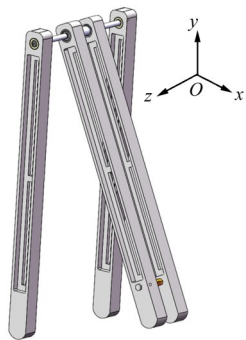


图10 被动行走机器人的三维模型

Fig. 10 Three-dimensional model of the passive walking robot

在被动行走机器人的三维模型中,等效腿长为500 mm,足端为半径为15 mm的圆弧,半径与腿长之比仅为3%,因此机器人足部可被近似视为点状足。腿部和配重块的材料选取铝材,密度为 $2\,700\text{ kg/m}^3$ 。仿真模型结构参数选自表1,接触参数如表3所示。

表3 模型接触参数

Tab. 3 Contact parameters of the model

| 参数  | 值                 |
|---|-------------------|
| 接触刚度/( $\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$ )              | $1\times 10^6$    |
| 接触力指数   | 1.5               |
| 最大阻尼/( $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{mm}^{-1}$ ) | 10                |
| 最大嵌入深度/mm   | $1\times 10^{-4}$ |
| 静摩擦因数   | 0.9               |
| 动摩擦因数   | 0.8               |
| 静摩擦转换速度/( $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ )           | 100               |
| 动摩擦转换速度/( $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ )           | 1 000             |

在Adams软件的仿真环境下,在斜坡上安排了台阶块,以防止机器人在行走过程中出现因擦地而摔倒的情况;并用正弦函数生成地表轮廓,以模拟非均匀路面,正弦波的幅值为腿长的1‰。将表2中 $a'$ 点的各参数值作为仿真的初始条件。在初始时,被动行走机器人的双腿站立在台阶块上,给定双腿之间的初始夹角 $\theta_0$ 为0.542 1 rad,给定外侧腿和内侧腿的质心相对于地面的初始角速度 $\dot{\theta}_0$ 分别为-0.377 2、-1.091 8 rad/s,以逆时针方向为正。随后,开始进行仿真验证,机器人的行走过程如图11所示。

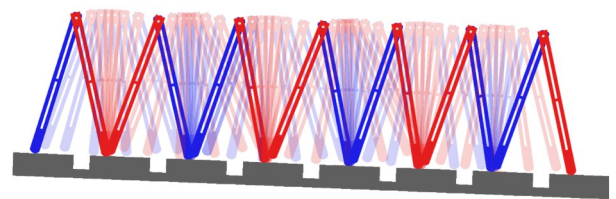


图11 行走过程仿真

Fig. 11 Walking process simulation

图12所示为根据Adams软件仿真得到的数据结果绘制的步态轨迹,黑色圈为根据理论计算得到的极限环。由图12可知,三维模型中结构和装配的差异将导致内、外腿的质量不同,使得机器人在经历3步或4步调整后,两腿的轨迹分别收敛至不同的极限环,但路面的非均匀性使得机器人的步态轨迹与理想极限环具有一定差异。此外,步态在相空间中的轨迹发生跳动式突变。图13为通过仿真得到的时间响应图。由图13可知, $\theta_0$ -时间曲线较为光滑;而在 $\dot{\theta}_0$ -时间曲线中,在支撑阶段, $\dot{\theta}_0$ 的值会发生突变,这是由机器人的支撑腿在足、地接触点沿行走方向发生滑移造成的。但该滑移现象并未导致机器人直接摔倒,经过短暂的调整后,机器人仍可保持稳定步态,并继续行走。

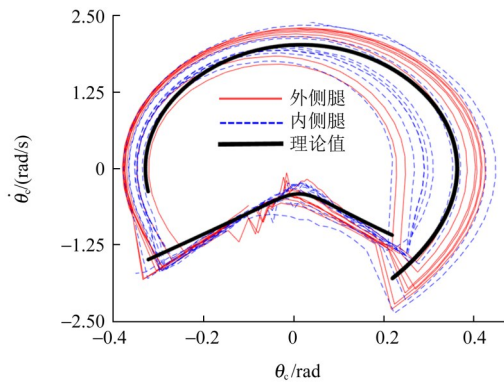


图 12 利用仿真数据重构的极限环

Fig. 12 Limit cycles reconstructed by simulation data

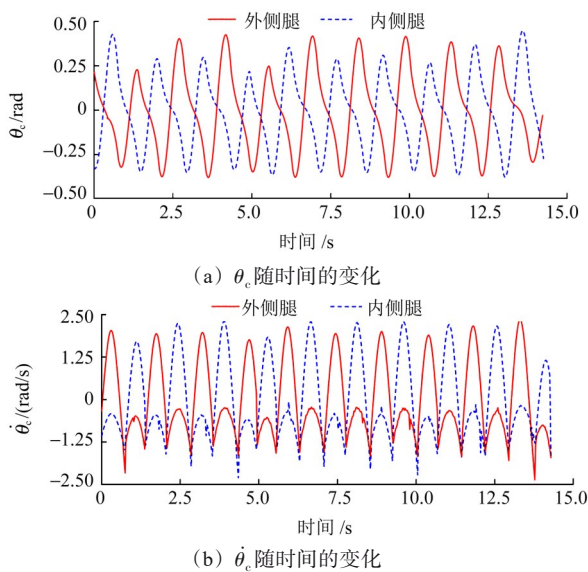


图 13 仿真模型的响应图

Fig. 13 Response diagrams of the simulation model

## 5 结论

为拓展被动行走理论的适用范围,研究了被动行走机器人在非均匀路面上行走时的极限环步态,并对机器人行走失败的初始条件及其属性进行了系统分类,绘制了吸引盆的外部拓扑结构。此外,详细分析了路面不平度增大时系统吸引盆的变化过程。最后,利用 Adams 软件实现了机器人的稳定行走仿真。得出的主要结论如下:

1) 非均匀路面激励导致机器人的步态轨迹偏离极限环,且偏离程度随着路面不平度的增大而增强,并不断向吸引盆边界靠近,这使得机器人摔倒的风险增加。

2) 对吸引盆的外部域进行了详细分类,并精确标记了机器人的行走步数和摔倒方式。通过分析可知,外部拓扑结构具有明显的分形特性,其中机器人至少能够行走 1 步的区域占整个状态空间的 41.28%。这一发现为机器人行走初值的选择提供了更大的范围。

3) 随着路面不平度的增大,吸引盆的面积逐渐减

小,系统的全局稳定性也下降;当路面不平度为腿长的 1.5‰ 时,系统的吸引盆被破坏,机器人的稳定步态消失。

## 参考文献 (References)

- [1] MCGEER T. Passive dynamic walking [J]. The International Journal of Robotics Research, 1990, 9(2): 62-82.
- [2] MOON J S, LEE S M, BAE J, et al. Analysis of period-1 passive limit cycles for flexible walking of a biped with knees and point feet [J]. Robotica, 2016, 34(11): 2486-2498.
- [3] ZNEGUI W, GRITLI H, BELGHITH S. A new Poincaré map for investigating the complex walking behavior of the compass-gait biped robot [J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 94: 534-557.
- [4] GOSWAMI A, THUILOT B, ESPIAU B. A study of the passive gait of a compass-like biped robot: symmetry and chaos [J]. The International Journal of Robotics Research, 1998, 17(12): 1282-1301.
- [5] GRITLI H, BELGHITH S, KHRAIEF N. Cyclic-fold bifurcation and boundary crisis in dynamic walking of biped robots [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012, 22(10): 1250257.
- [6] ASANO F, YAMAKITA M, FURUTA K. Virtual passive dynamic walking and energy-based control laws [C]//Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2000). Piscataway: IEEE, 2000: 1149-1154.
- [7] IQBAL S, ZANG X Z, ZHU Y H, et al. Bifurcations and chaos in passive dynamic walking: a review [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2014, 62(6): 889-909.
- [8] MANCHESTER I R, METTIN U, IIDA F, et al. Stable dynamic walking over uneven terrain [J]. The International Journal of Robotics Research, 2011, 30(3): 265-279.
- [9] AFSHAR P N, REN L. Dynamic stability of passive bipedal walking on rough terrain: a preliminary simulation study [J]. Journal of Bionic Engineering, 2012, 9(4): 423-433.
- [10] HOBBELEN D G E, WISSE M. A disturbance rejection measure for limit cycle walkers: the gait sensitivity norm [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(6): 1213-1224.
- [11] SU J L, DINGWELL J B. Dynamic stability of passive dynamic walking on an irregular surface [J]. Journal of Biomechanical Engineering, 2007, 129(6): 802-810.
- [12] 柳宁. 双足被动行走器动力学仿真与实验研究 [D]. 北京: 清华大学, 2009: 67-76.  
LIU Ning. Simulation and experimental study on the dynamics of passive bipedal walker [D]. Beijing: Tsinghua University, 2009: 67-76. (In Chinese)
- [13] DENG K, ZHAO M G, XU W L. Passive dynamic walking with a torso coupled via torsional springs [J]. International Journal of Humanoid Robotics, 2017, 14(1): 1650024.
- [14] LIU N, LI J F, WANG T S. The effects of parameter variation on the basins of attraction of passive walking models [C]//Proceedings of the 2007 International Conference on Mechatronics and Automation. Piscataway: IEEE, 2007: 1908-1913.

- [15] SAFA A T, MOHAMMADI S, HAJMIRI S E, et al. How local slopes stabilize passive bipedal locomotion? [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 100:63-82.
- [16] SCHWAB A L, WISSE M. Basin of attraction of the simplest walking model [C]//Proceedings of the ASME 2001 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 6A: 18th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise. New York: ASME, 2021:531-539.
- [17] 刘铖, 周亚丽, 张奇志. 柔性双足机器人的吸引域计算及行走控制[J]. *计算机仿真*, 2023, 40(1):462-467.  
LIU Cheng, ZHOU Yali, ZHANG Qizhi. Attraction domain calculation and walking control of flexible biped robot [J]. *Computer Simulation*, 2023, 40(1):462-467. (In Chinese)
- [18] 高家昌, 高建设, 陶征. 被动步行平足机器人动力学参数研究[J]. *机械传动*, 2022, 46(12):22-30.  
GAO Jiachang, GAO Jianshe, TAO Zheng. Research on dynamic parameters of a passive walking robot with flat feet [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2022, 46(12):22-30. (In Chinese)
- [19] BOGSJÖ K, PODGORSKI K, RYCHLIK I. Models for road surface roughness [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2012, 50(5):725-747.
- [20] OBAYASHI I, AOI S, TSUCHIYA K, et al. Formation mechanism of a basin of attraction for passive dynamic walking induced by intrinsic hyperbolicity [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2016, 472(2190):20160028.
- [21] 柳宁, 李俊峰, 王天舒. 用胞胞映射计算被动行走模型不动点的吸引盆[J]. *工程力学*, 2008, 25(10):218-223.  
LIU Ning, LI Junfeng, WANG Tianshu. Study of the basin of attraction of passive models by the aid of cell-to-cell mapping method [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(10):218-223. (In Chinese)
- [22] RAO X B, GAO J S, DING S L, et al. Multistability of gaits, the basin of attraction and its external topology in the simplest passive walking model on stairs [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 172:113592.

## Study on the external topology structure of the basin of attraction for passive walking robots on rough terrain

ZHAO Tian<sup>1</sup> BAO Yumeng<sup>1</sup> FU Hong<sup>2</sup> GAO Jianshe<sup>1</sup> LIU Qiang<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Power Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

(2. The Third People's Hospital of Henan Province, Zhengzhou 450006, China)

**Abstract:** [Objective] The basin of attraction determines the global stability of passive walking robots, yet its narrow morphology poses tremendous challenges to the stable walking of robots in real environments. To address this issue, an investigation was conducted on the external topological structure of the basin of attraction for passive walking robots on rough terrain. [Methods] Firstly, a dynamic model of a point-foot robot walking on rough terrain was established. Secondly, the gait variation and global stability of the robot were explored using phase diagrams, Poincaré section diagrams and basins of attraction, with a focus on investigating the influence of external environmental factors on the system's basin of attraction and conducting a classified analysis of its external topological structure. Finally, the walking gait corresponding to the stable limit cycle was verified via simulation on Adams software. [Results] The results show that the external topological structure of the basin of attraction exhibits fractal characteristics, among which the region where the robot can walk at least one step accounts for 41.28% of the entire state space. The introduction of pavement environmental disturbances leads to a reduction in the area of the basin of attraction, but has a minor impact on its external topological structure of the basin of attraction. The research results expand the applicable scope of the passive walking theory and provide a larger space for the selection of initial gait conditions.

**Key words:** Passive walking; Rough terrain; Limit cycle; Basin of attraction; External topology

Corresponding author: LIU Qiang, E-mail: 13253438290@126.com

Fund: National Natural Science Foundation of China (59106225)

Received: 2024-03-15

(编辑:刘星泽)